

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT :

- **d'INGÉNIEURS DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION DE
L'AVIATION CIVILE (I.E.E.A.C)**

&

- **d'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AERIENNE
(I.C.N.A)**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

IEEAC : Coefficient : 4

ICNA : Coefficient : 2

Cette épreuve comporte :

1 page de garde (recto)

1 page d'instruction (recto)

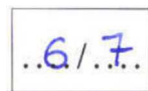
3 pages de sujet numérotées de 1 à 3

TOUT DISPOSITIF ELECTRONIQUE EST INTERDIT (EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

- 1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille ou feutre à encre foncée bleue ou noire.
- 2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
- 3) Numéroté chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroté les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

Par exemple, pour la 6^e page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroté ainsi la page 6 sur 7 :



- 4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.
- 5) Aucun brouillon ne sera ramassé.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.



Exercice 1

Soient n un entier naturel non nul et E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$E_n = \text{Vect}\{X^{2i}, i \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Q1. On considère l'application f qui, à un polynôme P de E_n , associe le polynôme

$$f(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'.$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de E_n .

b) Comparer le degré d'un polynôme $P \in E_n$ avec celui de $f(P)$. Quel est le noyau de f ?

Q2. Dans cette question uniquement on suppose que $n = 2$.

a) Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X^2, X^4)$ de E_2 .

b) Préciser une base $\mathcal{C}$ de E_2 dans laquelle la matrice de f est diagonale.

c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, expliciter la matrice M^k .

Q3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $t_k :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto t_k(x) = \cos(2k \arccos(x))$.

a) Rappeler la définition de la fonction Arc cosinus, son ensemble de définition, ses propriétés de continuité et de dérivabilité. Construire sa courbe représentative.

b) Pour $p, q \in \mathbb{R}$, exprimer la somme $\cos(p) + \cos(q)$ sous la forme d'un produit de cosinus. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, montrer que $t_k(x) + t_{k+2}(x) = 2(2x^2 - 1)t_{k+1}(x)$.

Q4. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $T_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on ait $t_k(x) = T_k(x)$. Expliciter T_2 .

b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_k .

c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, rechercher les racines de T_k appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$ puis factoriser le polynôme T_k dans $\mathbb{R}[X]$.

Q5. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction t_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et calculer $(x^2 - 1)t_k''(x) + xt_k'(x)$ pour tout réel $x \in] -1, 1[$.

b) Établir qu'il existe une base de E_n dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, on pose :

$$m(a, b, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) d\theta.$$

Q1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, calculer $m(a, b, r)$ lorsque f est définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Q2. Soient n un entier naturel non nul et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = \operatorname{Re}[(x + iy)^n]$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta$.

b) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, calculer $m(a, b, r)$.

Q3. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

a) Énoncer soigneusement le théorème de dérivation sous le signe intégral.

b) Soient $R > 0$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| \leq R\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Justifier l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in D$, on ait :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq C \text{ et } \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq C.$$

c) Montrer que l'application $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto F(r) = m(a, b, r)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et expliciter $F'(r)$ sous forme intégrale à l'aide des dérivées partielles premières de f .

Indication : on pourra commencer par s'intéresser à la restriction de F à $[0, R]$ où $R > 0$.

Q4. a) On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$ (on dit alors que f et g sont *associées*). Montrer alors que, pour tout $r \geq 0$, $m(a, b, r) = f(a, b)$.

Indication : Calculer la dérivée de la fonction $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto g(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$.

b) En déterminant une fonction g associée à f , retrouver le résultat de la question 1.

c) Dans le cas où la fonction f est définie par $f(x, y) = e^x \sin y$, calculer $m(a, b, r)$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$.

Q5. Étant donné $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose :

$$M(a, b, r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r m(a, b, \rho) \rho d\rho.$$

a) Rappeler l'énoncé du théorème fondamental du calcul intégral (aussi appelé théorème fondamental de l'analyse).

b) On fixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction $G : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto M(a, b, r)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $r > 0$, exprimer $G'(r)$ en fonction de r , $F(r)$ et $G(r)$.

c) En revenant à la définition de limite, montrer que $\lim_{r \rightarrow 0^+} G(r) = F(0)$.

Q6. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout $r \geq 0$, $m(a, b, r) = f(a, b)$, (ii) Pour tout $r > 0$, $M(a, b, r) = f(a, b)$.

Exercice 3

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Première partie

On dispose d'une urne comportant deux boules blanches et une boule noire. On réalise une première série de tirages avec remise jusqu'à l'obtention, pour la première fois, de la boule noire ; on effectue ensuite une seconde série de tirages avec remise qui se termine à nouveau dès l'obtention de la boule noire. On admet que cette expérience est modélisée par un espace

probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on désigne par X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués lors de la première (resp. seconde) série.

Dans cette partie, les résultats relatifs au calcul d'une espérance, d'une variance ou d'une covariance seront présentés sous la forme de fractions irréductibles.

Q1. Quelle est la loi de la variable X_1 ? Quelle est son espérance ? Sa variance ? Sa fonction génératrice ?

Q2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer les probabilités suivantes :

$$P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}), P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 < k\}) \text{ et } P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 > k\}).$$

L'expression de $P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 < k\})$ sera présentée sous la forme

$$P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 < k\}) = \frac{1}{3}[a^{k-1} - (a^2)^{k-1}] \text{ où } a \in]0, 1[.$$

Q3. On pose $I_2 = \min\{X_1, X_2\}$ et $M_2 = \max\{X_1, X_2\}$: on admet qu'il s'agit de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Déterminer la loi de I_2 . Que remarque-t-on ? En déduire son espérance et sa variance.
- Déterminer la fonction génératrice de M_2 . Vérifier que $E(M_2) = \frac{21}{5}$ et $V(M_2) = \frac{192}{25}$.
- Les variables I_2 et M_2 sont-elles indépendantes ?
- Calculer la covariance de I_2 et M_2 .

Deuxième partie

On considère désormais une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui sont mutuellement indépendantes et de même loi, chacune suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Pour tout entier naturel non nul n et pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $I_n(\omega) = \min\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$.

Q4. a) Rappeler ce qu'est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application I_n est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pourra procéder par récurrence.

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $P(I_n \geq k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que I_n suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

b) Calculer l'espérance et la variance de I_n . Déterminer également :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(I_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} V(I_n) \text{ et pour chaque entier } k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(I_n = k).$$

Q6. a) Pour tout $\omega \in \Omega$, montrer que la suite $(I_n(\omega))_{n \geq 1}$ converge vers une limite appartenant à $\mathbb{N}$ notée $\ell(\omega)$.

b) Exprimer l'ensemble $L = \{\omega \in \Omega \mid \ell(\omega) = 1\}$ en fonction des événements $\{I_n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $L \in \mathcal{A}$.

c) Rappeler l'énoncé du théorème de continuité croissante. Calculer $P(L)$.

