



MINISTÈRE
DE LA TRANSITION
ÉCOLOGIQUE
ET DE LA COHÉSION
DES TERRITOIRES

Liberté
Égalité
Fraternité

Code concours : 2024-ITPE-10
Code épreuve : Mathématiques

CONCOURS INTERNE
DES INGENIEURS DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ETAT
SESSION 2024

Epreuve de mathématiques

Épreuve n° 2 : Mathématiques			
Durée : 4 heures	Coefficient : 4	Sujet : 5 pages	Document complet : 6 pages

Descriptif : Cette épreuve est une composition de mathématiques consistant en la résolution d'une série d'exercices.

Toute note strictement inférieure à 5 sur 20 peut être éliminatoire.

À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET

Modèle CMEN v2 INSOTEC

Nom de famille : N O M

Prénom(s) : P R E N O M

Numéro d'inscription : 3 5 7

Né(e) le : 2 7 / 0 3 / 1 9 7 7

- Le bandeau situé en haut de chacune des feuilles de composition doit être rempli en totalité (**code concours, code épreuve, spécialité, y compris le numéro d'inscription communiqué dans votre convocation**).
- L'usage de la calculatrice, d'un dictionnaire, de tout autre document est interdit.
- Les candidats ne doivent pas faire de marge sur leur copie.
- Les copies devront être correctement paginées. Pagination d'une copie double sur 4 (1/4, 2/4, ...), deux copies doubles sur 8 (1/8, 2/8, ...), etc.
- Aucun signe distinctif ne doit apparaître dans la copie : nom ou nom fictif, signature, paraphe et symboles sont interdits.
- Seul l'usage d'un stylo à bille noir ou bleu est autorisé (feutre et stylo friction sont interdits). L'utilisation d'une autre couleur, pour écrire ou souligner, pouvant être considérée comme un signe distinctif, est proscrite.
- Aucun liquide blanc ni ruban correcteur ne doit être employé (une telle utilisation empêcherait la correction de la copie). Toute correction se fait par rature, de préférence à la règle.
- Les feuilles de brouillon, ou tout autre document, ne sont pas considérées comme faisant partie de la copie et ne feront pas l'objet d'une correction. Ils ne doivent pas être joints à la copie.

Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner une sanction par le jury.

Épreuve de mathématiques

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME I

On considère un plancher constitué de lattes parallèles identiques de largeur $L > 0$. On laisse tomber sur ce plancher une aiguille de longueur $\ell > 0$ et on regarde si, dans la position où elle est tombée, cette aiguille rencontre la jointure entre deux lattes.

On prend les conventions suivantes : on suppose que les lattes de parquet sont alignées dans la direction verticale. On note $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ l'angle géométrique entre l'aiguille et l'horizontale. On note h la longueur du projeté orthogonal de l'aiguille sur l'axe horizontal.

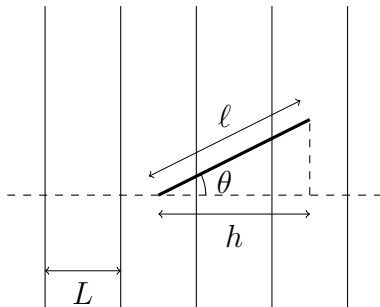


FIGURE 1. L'aiguille est tombée de manière à rencontrer la jointure (en deux endroits).

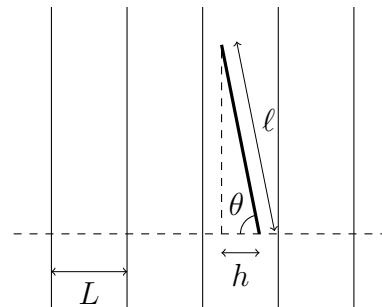


FIGURE 2. L'aiguille est tombée de manière à ne pas rencontrer la jointure.

Q1. Rappeler la relation entre ℓ , h et θ .

Partie A. Calcul de la probabilité d'intersection. Dans la suite, on se restreint au cas où $\ell < L$.

On admet que, à angle θ fixé, la probabilité que l'aiguille rencontre la jointure entre deux lattes est égale à $\frac{\ell}{L} \cos(\theta)$

Pour simplifier l'étude, on discrétise le problème de la manière suivante : soit $n \in \mathbf{N}^*$; pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on pose $\theta_k = \frac{k\pi}{2n}$. On suppose que l'angle θ est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$.

On note A_n l'événement « l'aiguille rencontre la jointure entre deux lattes ».

Q2. On pose $X = \frac{2n\theta}{\pi}$. Donner la loi de X , rappeler son espérance et sa variance.

Q3. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire θ .

Q4. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, donner la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{(\theta=\theta_k)}(A_n)$.

Q5. À l'aide de la formule des probabilités totales, que l'on justifiera soigneusement, en déduire que :

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{\ell}{L} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Q6. Justifier que, pour n tendant vers $+\infty$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \longrightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta.$$

Q7. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{L}.$$

On admet que, dans la version non discrétisée du problème, la probabilité que l'aiguille rencontre la jointure entre deux lattes est bien égale à $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{L}$.

Partie B. Approximation de $\frac{1}{\pi}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On lance n aiguilles de longueur $\ell = \frac{L}{2}$; on suppose que chaque aiguille atterrit sur le parquet de la manière étudiée à la partie précédente (en particulier, qu'elle rencontre la jointure entre deux lattes avec probabilité $\frac{1}{\pi}$) et indépendamment des autres aiguilles.

On note N la variable aléatoire égale au nombre d'aiguilles qui rencontrent la jointure entre deux lattes.

Q8. Reconnaître la loi de N et donner son espérance.

Q9. Expliquer comment, en lançant un grand nombre d'aiguilles, on peut déterminer une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\pi}$.

Q10. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{N}{n} - \frac{1}{\pi}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\pi - 1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

PROBLÈME II

Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E . On rappelle que f^0 désigne l'identité de E et que pour tout entier naturel n non nul, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

On dit que f est *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

Q1. Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

(a) Soit f_1 l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f_1 est cyclique.

(b) Soit f_2 l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Montrer que $\mathcal{B}' = (e_3, 2e_1 + 3e_2, 3e_1)$ est une base de E .
- (ii) En déduire que f_2 est cyclique.
- (iii) Donner la matrice de f_2 dans la base $\mathcal{B}'$.
- (iv) Déterminer tous les endomorphismes g de E tels que $f_2 \circ g = g \circ f_2$.

Dans la suite, f désigne un endomorphisme de E .

Q2. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Q3. Dans cette question uniquement, on suppose que f est nilpotent d'indice de nilpotence n , c'est-à-dire que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre. Que peut-on en déduire ?

Q4. Dans la suite, f désigne un endomorphisme cyclique de E et x un vecteur de E tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

Soit $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$.

- (a) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- (b) Soient $g \in C(f)$ et $h \in C(f)$ tels que $g(x) = h(x)$. Montrer que $g = h$.
- (c) Le but de cette question est de montrer que $C(f) = \text{Vect}(f^0, f, \dots, f^{n-1})$.
 - (i) Soit $g \in C(f)$. Justifier qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que :

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k.$$

- (ii) Conclure.

PROBLÈME III

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) = f(1) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in [0; 1]$, $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

Pour simplifier les notations, on va prolonger la fonction f en une fonction définie sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0; 1]; \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1. \end{cases}$$

On note toujours f la fonction ainsi prolongée ; on admet qu'elle est continue sur $\mathbf{R}$.

Q1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$J_n = \int_{-1}^1 (1 - u^2)^n du.$$

- (a) Calculer J_0 , J_1 et J_2 .
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} J_n$. En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et strictement positive.
- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 f(x)(1 - u^2)^n du.$$

Q2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, on définit :

$$P_n(x) = \frac{1}{J_n} \int_0^1 f(t) (1 - (t - x)^2)^n dt.$$

- (a) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$P_n(x) = \frac{1}{J_n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{2k} \left[\binom{2k}{j} (-1)^{k+j} \int_0^1 t^{2k-j} f(t) dt \right] x^j.$$

En déduire que P_n est une fonction polynômiale de degré au plus $2n$.

- (b) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$P_n(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1+x}^{1+x} f(t) (1 - (t - x)^2)^n dt.$$

- (c) En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$P_n(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 f(x+u)(1 - u^2)^n du.$$

Q3. Soit $\varepsilon > 0$. On admet que la continuité de f implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x \in [0; 1]$ et $|u| \leq \delta$, $|f(x+u) - f(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

- (a) Justifier que la fonction $|f|$ admet un maximum M sur $\mathbf{R}$.
- (b) Justifier que, pour tous $x \in [0; 1]$ et $u \in [-1; 1]$, $|f(x+u) - f(x)| \leq 2M$. En déduire que, si $|u| \geq \delta$, alors :

$$|f(x+u) - f(x)| \leq 2M \frac{u^2}{\delta^2}.$$

- (c) Montrer que, pour tous $x \in [0; 1]$ et $u \in [-1; 1]$:

$$|f(x+u) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{u^2}{\delta^2}.$$

Q4. On conserve les notations de la question précédente. Soit $n \in \mathbf{N}$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$P_n(x) - f(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 (f(x+u) - f(x))(1-u^2)^n du.$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2 J_n} \int_{-1}^1 u^2(1-u^2)^n du.$$

(c) À l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée (on pourra remarquer que $u^2(1-u^2)^n = u \cdot u(1-u^2)^n$), montrer que :

$$\int_{-1}^1 u^2(1-u^2)^n du = \frac{J_{n+1}}{2(n+1)}.$$

(d) En déduire que :

$$\frac{2M}{\delta^2 J_n} \int_{-1}^1 u^2(1-u^2)^n du \leq \frac{M}{\delta^2(n+1)}.$$

Q5. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

FIN DU SUJET