

Agro-Véto 2026 : corrigé de mathématiques

Proposition de corrigé — non officielle. BCPST 2026, méthodes de calcul et raisonnement : probabilités, endomorphisme et loi de Yule–Simon.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Partie I : approximation de Poisson

1. Loi de X_n

Avec N essais indépendants et une probabilité λ/N , X_n suit $B(N ; \lambda/N)$. Le modèle exige $N \geq \lambda$ pour que la probabilité soit au plus 1 ; cette restriction ne gêne pas le passage à la limite.

2. Limite

Pour k fixé, $(N - k) \ln(1 - \lambda/N) \rightarrow -\lambda$, car $\ln(1 - u) = -u + o(u)$ en 0. Par exponentiation, $(1 - \lambda/N)^{N-k} \rightarrow e^{-\lambda}$.

3. Probabilité limite

Pour $N \geq k$, $P(X_n = k) = [N(N - 1) \dots (N - k + 1)/N^k] \times (\lambda^k/k!) \times (1 - \lambda/N)^{N-k}$. Le premier facteur tend vers 1 ; le dernier vers $e^{-\lambda}$. La limite est donc $e^{-\lambda} \lambda^k/k!$.

4. Rapport variance / espérance

Pour une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, espérance et variance valent λ . Leur rapport vaut 1.

Partie II : concentration

5. Inégalité de Markov

Comme X est positive, $X \geq a \times 1_{\{X > a\}}$. En prenant l'espérance, $E(X) \geq aP(X > a)$, donc $P(X > a) \leq E(X)/a$. Pour une variable discrète, le même argument consiste à limiter la somme de l'espérance aux valeurs supérieures à a .

6. Borne exponentielle

Pour $t > 0$, $X > a$ équivaut à $e^{tx} > e^{ta}$. Markov donne $P(X > a) \leq E(e^{tx})e^{-ta} = \exp(\psi(t) - ta)$. Pour $t = 0$, la borne vaut 1 et reste vraie, mais on ne doit pas utiliser l'équivalence précédente.

7a. Cas de Poisson

$E(e^{tx}) = e^{-\lambda} \sum (\lambda e^t)^k/k! = \exp[\lambda(e^t - 1)]$. La série converge pour tout t réel : $\psi(t) = \lambda(e^t - 1)$.

7b. Optimisation

La dérivée de $\lambda(e^t - 1) - ta$ est $\lambda e^t - a$; la dérivée seconde est positive. Pour $a \geq \lambda$, le minimum sur $t \geq 0$ est atteint en $t = \ln(a/\lambda)$, ou $t = 0$ lorsque $a = \lambda$. On obtient $P(X > a) \leq \exp[a \ln \lambda - a \ln a + a - \lambda]$.

7c. Comparaison

Markov donne λ/a . Le logarithme du rapport entre la borne exponentielle et λ/a tend vers $-\infty$, le terme dominant étant $-a \ln a$. La borne exponentielle est donc **meilleure pour a assez grand**.

Partie III : endomorphisme

8. Existence de l'intégrale

Pour $v > 0$, $|P(s)|\exp(-s/(2v)) \rightarrow 0$: l'exponentielle domine toute puissance. Pour s assez grand, ce produit est au plus 1, d'où $|P(s)|\exp(-s/v) \leq \exp(-s/(2v))$. Le majorant est intégrable à l'infini ; sur un segment, l'intégrande est continue. **$L_p(v)$ est donc bien défini.**

9. Monômes

En posant $u = s/v$, $(1/v) \int s^k \exp(-s/v) ds = v^k \int u^k e^{-u} du$, avec intégrales de 0 à l'infini. L'intégration par parties donne $J_k = k J_{k-1}$ et $J_0 = 1$; les termes aux bornes sont nuls. Ainsi **$J_k = k!$** , et **$L_p(v) = \sum k! a_k v^k$.**

10 et 11. Linéarité et dimension

L conserve les sommes et les multiples scalaires, et envoie les polynômes de degré au plus d dans ce même espace. C'est un endomorphisme. **$\dim R_d[X] = d + 1$.**

12 et 13. Noyau et surjectivité

Le noyau est l'ensemble des P tels que $L(P) = 0$. Les coefficients $k! a_k$ doivent tous être nuls ; comme $k! \neq 0$, **$\ker L = \{0\}$** . L est injectif, donc surjectif en dimension finie. Son inverse divise le coefficient de X^k par $k!$.

14. Matrice pour $d = 3$

Dans la base $(1, X, X^2, X^3)$, **$\text{Mat}(L) = \text{diag}(1, 1, 2, 6)$** : chaque colonne exprime l'image du monôme correspondant.

15 et 16. Valeurs propres

La valeur **1** a pour espace propre **$\text{Vect}(1, X)$** . Pour k de 2 à d , la valeur **$k!$** a pour espace propre **$\text{Vect}(X^k)$** . Si $d = 1$, seule la première valeur apparaît. La base canonique est une base de vecteurs propres : **L est diagonalisable pour tout $d \geq 1$.**

17a. Le commutant de A

$C(A)$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto AM - MA$. C'est donc un sous-espace vectoriel.

17b. Conditions sur M

Avec $A = \text{diag}(0, 0, 1)$, AM ne conserve que la dernière ligne de M , et MA que sa dernière colonne. L'égalité équivaut à **$c = f = g = h = 0$** . Les coefficients a, b, d, e et k sont libres.

17c et 17d. Base et exemple

Une base est **$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33})$** ; la dimension vaut **5**. La matrice **E_{12}** commute avec A , mais n'appartient pas à $\text{Vect}(I_3, A)$, dont toutes les matrices sont diagonales.

Partie IV : loi de Yule–Simon

18 et 19. Convergence et changement de variable

L'intégrande définissant p_k est positive et majorée par $v \exp(-(v+1)s)$. L'intégrale converge. Posons $t = e^{-s}$, donc $ds = -dt/t$: les bornes deviennent 1 et 0. On obtient $p_k = v \int_0^1 t^v (1-t)^k dt$.

20a. Somme géométrique

Pour $t > 0$, $\sum_{k=0}^N (1-t)^k = [1 - (1-t)^{N+1}]/t$. À $t = 0$, la somme vaut $N+1$; la formule s'interprète par prolongement.

20b. Majoration

Comme $v > 1$ et $0 \leq t \leq 1$, $t^v(v-1) \leq 1$. L'intégrale demandée est donc au plus $\int_0^1 (1-t)^{N+1} dt = 1/(N+2)$.

20c. Une loi de probabilité

Les p_k sont positifs. Leur somme partielle vaut $1 - v \int_0^1 t^v (v-1)(1-t)^{N+1} dt$. Le reste est compris entre 0 et $v/(N+2)$, donc tend vers 0. $\sum p_k = 1$: ces nombres définissent bien la loi d'une variable X à valeurs dans N .

Partie V : moments

Ici, $v > 2$.

21a. Relation entre les intégrales

L'intégration de la dérivée de $t^{n+1}(1-t)^{p+1}$ sur $[0; 1]$ donne $(n+1)I_{n,p+1} = (p+1)I_{n+1,p}$. Les deux valeurs aux bornes sont nulles.

21b. Formule

On a aussi $I_{n,p} = I_{n,p+1} + I_{n+1,p}$. Les deux relations donnent $I_{n+1,p} = [(n+1)/(n+p+2)]I_{n,p}$. À partir de $I_{0,p} = 1/(p+1)$, la récurrence conduit à $I_{n,p} = n!p!/(n+p+1)!$.

21c. Limite

$$(N+1)I_1^N = (N+1)/[(N+1)(N+2)] = 1/(N+2) \rightarrow 0.$$

22a. Somme dérivée

On dérive, pour $t > 0$, la somme géométrique de 20a, puis on change le signe. Cela donne $\sum_{k=1}^N k(1-t)^{k-1} = 1/t^2 - (1-t)^{N+1}/t^2 - (N+1)(1-t)^N/t$.

22b. Intégrale principale

$$v \int_0^1 t^v (1-t)/t^2 dt = v[1/(v-1) - 1/v] = 1/(v-1).$$

22c. Espérance

La somme $\sum_{k=1}^N k p_k$ est l'intégrale de la formule de 22a multipliée par $vt^v(1-t)$. Le premier terme est celui de 22b. Le premier reste est au plus $v/(N+3)$, car $t^v(v-2) \leq 1$. Le second est au plus $v(N+1)I_1^{N+1} = v(N+1)/[(N+2)(N+3)]$, car $t^v(v-1) \leq t$. Les deux tendent vers 0. Ainsi $E(X) = 1/(v-1)$.

23a. Moment factoriel

L'intégrale admise vaut $2v \int_0^1 t^v(v-3)(1-2t+t^2)dt = 2v[1/(v-2) - 2/(v-1) + 1/v]$. Après réduction : $E[X(X-1)] = 4/[(v-1)(v-2)]$.

23b. Variance

$X^2 = X(X-1) + X$. Les deux espérances finies donnent un second moment fini. En retranchant $E(X)^2$, on trouve $\text{Var}(X) = v^2/[(v-1)^2(v-2)]$.

23c. Surdispersion

$\text{Var}(X)/E(X) = v^2/[(v-1)(v-2)] > 1$, puisque $v^2 - (v-1)(v-2) = 3v-2 > 0$.

24. Comparer les modèles avec un échantillon

On peut comparer la variance empirique à la moyenne empirique : un rapport proche de 1 favorise le modèle de Poisson ; une surdispersion marquée est plus compatible avec le modèle de Yule–Simon. Il faut répéter les cultures dans des conditions comparables et tenir compte de l'incertitude d'échantillonnage. Ce diagnostic ne suffit pas à identifier le mécanisme biologique, car une hétérogénéité des conditions peut également augmenter la variance.