

Corrigé banque PT 2026 : mathématiques A

Proposition de corrigé — non officielle. Banque PT, session 2026, mathématiques A, épreuve de quatre heures sans calculatrice. Les quatre parties sont traitées, avec graphique et programme Python.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Partie A — Matrices $M(a, b)$

On écrit $M(a, b)$ sous la forme de deux lignes (a, b) et $(1, 1)$. Son polynôme caractéristique est $\chi(\lambda) = \lambda^2 - (a + 1)\lambda + a - b$.

A1. Critère de trigonalisation

Une matrice est trigonalisable sur un corps K **si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur K** . En particulier, toute matrice complexe est trigonalisable sur $\mathbb{C}$; sur $\mathbb{R}$, ses valeurs propres doivent être réelles.

A2. Matrice M_1

Pour $a = 2$ et $b = 6$, $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$. Les deux valeurs propres réelles sont distinctes : **M_1 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$** .

On peut prendre $P_1 = [(3, -2) ; (1, 1)]$, dont les colonnes sont les vecteurs propres $(3, 1)$ et $(-2, 1)$, et $D_1 = \text{diag}(4, -1)$. Le déterminant de P_1 vaut 5, donc P_1 est inversible, et $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$. La notation entre crochets sépare ici les lignes par un point-virgule.

A3. Matrice M_2

Pour $a = 3$ et $b = -2$, $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$, de racines $2 + i$ et $2 - i$. **M_2 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.**

Avec les vecteurs propres $(1 + i, 1)$ et $(1 - i, 1)$, on obtient $P_2 = [(1 + i, 1 - i) ; (1, 1)]$ et $D_2 = \text{diag}(2 + i, 2 - i)$. Le déterminant de P_2 vaut $2i \neq 0$.

A4. Matrice M_3

Son polynôme est $(\lambda - 3)^2$. M_3 n'est pas égale à $3I$: elle ne peut donc pas être diagonalisable avec pour seule valeur propre 3. Elle est en revanche **trigonalisable sur $\mathbb{R}$** .

Posons $v_1 = (2, 1)$ et $v_2 = (1, 0)$. On vérifie $f_3(v_1) = 3v_1$ et $f_3(v_2) = v_1 + 3v_2$. Le déterminant des deux vecteurs vaut -1 . Dans la base (v_1, v_2) , la matrice est donc bien **$T_3 = [(3, 1) ; (0, 3)]$** .

A5 à A7. Inversibilité et diagonalisation

A5. Le déterminant vaut $a - b$. La condition nécessaire et suffisante d'inversibilité est **$a \neq b$** .

A6. Le discriminant est $\Delta(a, b) = (a - 1)^2 + 4b$.

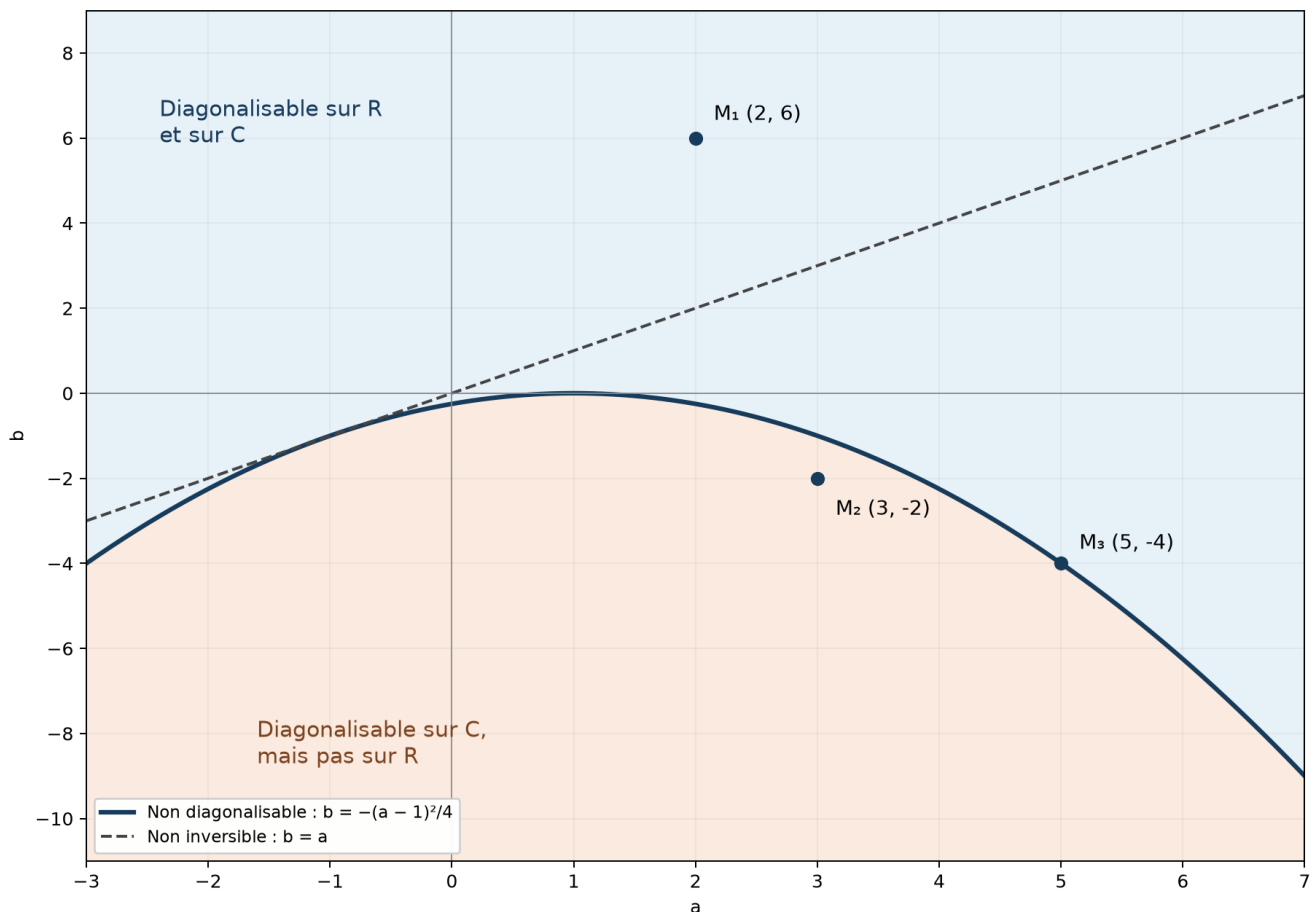
A7a. Si $\Delta = 0$, la seule valeur propre est $(a + 1)/2$. Une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre devrait être scalaire, ce que la présence du coefficient 1 en position (2, 1) interdit. Elle n'est donc **pas diagonalisable, même sur C**.

A7b. Si $\Delta > 0$, les valeurs propres réelles sont distinctes : diagonalisation sur R et C. Si $\Delta < 0$, elles sont complexes non réelles et distinctes : diagonalisation sur C uniquement.

A8. Représentation dans le plan (a, b)

La non-inversibilité correspond à la droite $b = a$. La frontière des régions de diagonalisation est la parabole $b = -(a - 1)^2/4$, de sommet (1, 0) : au-dessus, diagonalisation réelle ; au-dessous, diagonalisation complexe uniquement ; sur la parabole, aucune diagonalisation. La droite de non-inversibilité reste au-dessus de la parabole et lui est tangente en $(-1, -1)$: sur $b = a$, le discriminant vaut $(a + 1)^2$. Toutes les matrices de cette droite, sauf au point de tangence, sont donc diagonalisables sur R tout en étant non inversibles. La droite ne pénètre jamais dans la région de diagonalisation complexe uniquement.

Les trois points sont $M_1 : (2, 6)$, $M_2 : (3, -2)$ et $M_3 : (5, -4)$.



Régions de diagonalisation et droite de non-inversibilité de $M(a, b)$.

Partie B — Loi conjointe de X et Y

Les valeurs sont $-1, 0$ et 1 . La matrice de la loi conjointe est $(1/12)[(1, 1, 2) ; (2, 2, 1) ; (1, 1, 1)]$. U est la colonne $(1, 1, 1)$ et V la colonne $(-1, 0, 1)$.

B1. Loi et espérance de X

La i^{e} composante de CU additionne les probabilités de la ligne i , c'est-à-dire $\sum_j P(X = x_i, Y = x_j) = P(X = x_i)$. Ainsi :

Valeur	$P(X = \text{valeur})$	$P(Y = \text{valeur})$
-1	$4/12 = 1/3$	$4/12 = 1/3$
0	$5/12$	$4/12 = 1/3$
1	$3/12 = 1/4$	$4/12 = 1/3$

Multiplier à gauche par V^T pondère les probabilités par les valeurs de X : $E(X) = V^T CU = -1/3 + 1/4 = -1/12$.

B2. Loi et espérance de Y

La loi de Y est donnée par $C^T U$ et son espérance par $V^T C^T U$. Le tableau montre que Y est uniforme sur les trois valeurs, donc $E(Y) = 0$.

B3 et B4. Produit et covariance

$V^T CV = \sum_i \sum_j x_i x_j c_{ij}$ représente $E(XY)$. Seuls les quatre coins contribuent : $E(XY) = (1 - 2 - 1 + 1)/12 = -1/12$.

La covariance est donc $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -1/12$.

B5. Indépendance

X et Y ne sont pas indépendantes. Première justification : leur covariance est non nulle, alors que l'indépendance imposerait une covariance nulle. La réciproque de ce critère n'est pas générale.

Deuxième justification : $P(X = 0, Y = 0) = 2/12 = 1/6$, tandis que $P(X = 0)P(Y = 0) = (5/12)(1/3) = 5/36$. Ces deux probabilités sont différentes.

B6. Trace

Les cases diagonales correspondent aux événements $X = Y$. Ainsi $\text{tr}(C) = P(X = Y) = (1 + 2 + 1)/12 = 1/3$.

Partie C — Matrice aléatoire

C1. Lorsque $A = X$ et $B = Y$

a. La matrice est inversible lorsque $A \neq B$. La réponse B6 donne donc $P(\text{inversible}) = 1 - 1/3 = 2/3$.

b. L'absence de diagonalisation même complexe correspond à $\Delta(A, B) = 0$. Parmi les neuf couples possibles, ce sont $(-1, -1)$ et $(1, 0)$. Leur probabilité totale vaut $1/12 + 1/12 = 1/6$.

C2. Égalité de deux variables indépendantes

L'événement $A = B$ est la réunion disjointe des événements $\{A = k, B = k\}$. En utilisant l'indépendance :

$$P(A = B) = \sum_{k \in H} P(A = k)P(B = k).$$

On peut sommer sur un ensemble commun contenant leurs valeurs ; une valeur impossible pour l'une des variables contribue zéro.

C3. Loi binomiale et loi géométrique

a. Pour A de loi B(n, p), les valeurs possibles sont 0 à n, avec $P(A = k) = C(n, k)p^k(1 - p)^{n-k}$.

b. Avec la convention du sujet pour la loi géométrique, B prend les valeurs 1, 2, ..., et $P(B = k) = r(1 - r)^{k-1}$.

c. La non-inversibilité équivaut à $A = B$. En sommant de $k = 1$ à n et en factorisant $r/(1 - r)$, on obtient :

$$P(A = B) = [r/(1 - r)] \sum_{k=1}^n C(n, k)[p(1 - r)]^k(1 - p)^{n-k}.$$

La formule du binôme, après retrait du terme $k = 0$, donne $P(\text{non inversible}) = [r/(1 - r)][(1 - pr)^n - (1 - p)^n]$.

C4. A et C = -B de lois de Poisson

a. A prend les valeurs de N, avec $P(A = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$.

b. C reste indépendante de A, puisque c'est une fonction de B. Les fonctions génératrices sont $G_A(s) = e^{\lambda(s-1)}$ et $G_C(s) = e^{\mu(s-1)}$. Leur produit est $e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$: A + C suit donc la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

c. Ici $A \geq 0$ et $B = -C \leq 0$. $A = B$ ne peut se produire que pour $A = C = 0$, donc pour $A + C = 0$. La probabilité de non-inversibilité vaut $e^{-(\lambda+\mu)}$, et $P(\text{inversible}) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)}$.

C5. Deux lois de Poisson positives

On revient à A de paramètre λ et B de paramètre μ , indépendantes et toutes deux à valeurs positives ou nulles. La formule de C2 donne :

$$I = P(A = B) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda\mu)^k / (k!)^2.$$

C6. Approximation par somme partielle

a. Pour $k \geq n + 1$, on a $k! \geq (n + 1)!$, donc $1/(k!)^2 \leq 1/[(n + 1)! k!]$. Tous les termes étant positifs :

$$0 \leq R_n \leq [e^{-(\lambda+\mu)} / (n + 1)!] \sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda\mu)^k / k! \leq e^{(\lambda\mu - \lambda - \mu)} / (n + 1)!.$$

Le majorant demandé est établi ; il tend vers zéro, ce qui assure l'arrêt du calcul pour tout $\epsilon > 0$, dans le modèle de calcul exact.

b. Voici une fonction utilisant le majorant pour choisir le rang de troncature :

```
from math import exp, factorial

def val_app(eps):
    n = 0
    x = la * mu
    scale = exp(-la - mu)
    total = scale
    bound_scale = exp(x - la - mu)
```

```

while bound_scale / factorial(n + 1) > eps:
    n += 1
    total += scale * x**n / factorial(n)**2
return total

```

À l'arrêt, l'erreur de troncature est au plus eps . Cette écriture répond à l'exercice ; pour de très grands paramètres, les débordements et erreurs d'arrondi exigeraient une autre implémentation numérique.

c. L'instruction à ajouter est `print(val_app(1e-5))`.

C7. Approximation par simulation

a. J_i suit une loi de **Bernoulli de paramètre I** .

b. Les simulations étant indépendantes, $K_N = \sum J_i$ suit la loi binomiale $B(N, I)$.

c. Pour la fréquence $K_N = K_N/N$, $E(K_N) = I$ et $\text{Var}(K_N) = I(1 - I)/N$.

d. Bienaymé–Tchebychev donne $P(|K_N - I| \geq \varepsilon) \leq I(1 - I)/(N\varepsilon^2)$. Comme $I(1 - I) \leq 1/4$: **la probabilité est au plus $1/(4N\varepsilon^2)$** .

e. Par complémentarité, la probabilité que I appartienne à l'intervalle aléatoire $[K_N - \varepsilon ; K_N + \varepsilon]$ est **au moins $1 - 1/(4N\varepsilon^2)$** . Les bornes fermées peuvent seulement augmenter la probabilité par rapport à l'événement avec inégalité stricte.

f. La fréquence observée est **$21\,357/100\,000 = 0,21357$** . Pour $\varepsilon = 0,01$, l'intervalle observé est **$[0,20357 ; 0,22357]$** , et la garantie théorique de couverture est **au moins $0,975$** , soit 97,5 %. C'est une garantie sur la procédure de construction de l'intervalle, non une probabilité attribuée a posteriori au paramètre fixe I .

Pour $\varepsilon = 0,001$, l'intervalle est **$[0,21257 ; 0,21457]$** , mais le minorant devient **$1 - 2,5 = -1,5$** . Il est trivial : l'inégalité ne fournit ici **aucune garantie positive utile**. Elle ne démontre ni que cet intervalle est faux, ni que sa probabilité de couverture est négative.

Partie D — Rang d'une loi conjointe

Notons p et q les colonnes des probabilités marginales de X et Y . Toutes leurs composantes sont positives ou nulles et chacune somme à 1.

D1a. Rang sous indépendance

L'indépendance donne $Q = pq^T$. Les deux vecteurs sont non nuls ; toutes les colonnes sont des multiples de p et au moins l'une est non nulle. **Le rang est 1**.

D1b. Valeurs propres et multiplicités

Posons $\tau = q^T p$. Le vecteur p est propre pour τ , car $Qp = p(q^T p)$. Tout vecteur du noyau de q^T , espace de dimension $n - 1$, est annulé par Q . Avec l'hypothèse $p_i > 0$ pour tout i , on a $\tau > 0$ puisque certains q_i sont positifs. Les valeurs propres sont donc **τ , de multiplicité 1, et 0, de multiplicité $n - 1$** , lorsque $n > 1$. Pour $n = 1$, seule $\tau = 1$ apparaît.

D1c. Diagonalisation

Les sous-espaces $\text{Vect}(p)$ et $\ker(q^T)$ sont en somme directe : p n'appartient pas au noyau car $q^T p = \tau > 0$. Leurs dimensions totalisent n . Une base de chacun forme donc une base de vecteurs propres : **Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$** . On retrouve aussi l'identité **$Q^2 = \tau Q$** .

D1d. Contre-exemple sans positivité de toutes les masses de X

Prenons, sur les listes de quatre valeurs distinctes proposées, **$p = (1/2, 1/2, 0, 0)$** et **$q = (0, 0, 1/2, 1/2)$** . X et Y sont indépendantes et non constantes : chacune prend effectivement deux valeurs. Leur matrice est :

$$Q = [(0, 0, 1/4, 1/4) ; (0, 0, 1/4, 1/4) ; (0, 0, 0, 0) ; (0, 0, 0, 0)].$$

Ici $q^T p = 0$: **$Q^2 = 0$, mais $Q \neq 0$** . Une matrice nilpotente diagonalisable serait nulle, donc Q ne l'est pas. On interprète les listes $x_1, \dots, x_4$ et $y_1, \dots, y_4$ comme des listes autorisant des probabilités nulles, ce que demande précisément la suppression de l'hypothèse. Si l'écriture $X(\Omega)$ est prise au sens strict d'un support discret de masses toutes positives, cette demande de l'énoncé est incohérente.

D2. Réciproque : rang 1 implique indépendance

Toute matrice Q de rang 1 s'écrit uv^T . La somme de ses coefficients vaut 1, donc **$(\sum u_i)(\sum v_j) = 1$** . Les marginales vérifient $p_i = u_i \sum v_j$ et $q_j = v_j \sum u_i$. En multipliant :

$$p_i q_j = u_i v_j (\sum u_i)(\sum v_j) = u_i v_j = q_{ij}.$$

Ainsi chaque probabilité conjointe est le produit des probabilités marginales : **X et Y sont indépendantes**. La preuve ne nécessite pas que toutes les masses marginales soient strictement positives.