

Banque PT 2026 : corrigé de mathématiques C

Proposition de corrigé — non officielle. PT 2026, mathématiques C : fonctions, séries, intégrales à paramètre et calcul différentiel.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Préambule : fonctions rationnelles et développements limités

On écrit $g(t) = t_0/(t_0 - t)$ et $f(t) = g(t) - 1$, avec $t_0 > 0$.

1. Dérivabilité

Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbf{R}$ privé de $\{t_0\}$. Leurs dérivées coïncident : $f'(t) = g'(t) = t_0/(t_0 - t)^2$.

2. Variations et limites

La dérivée est strictement positive. f croît sur chacun des intervalles $] -\infty ; t_0[$ et $]t_0 ; +\infty[$.

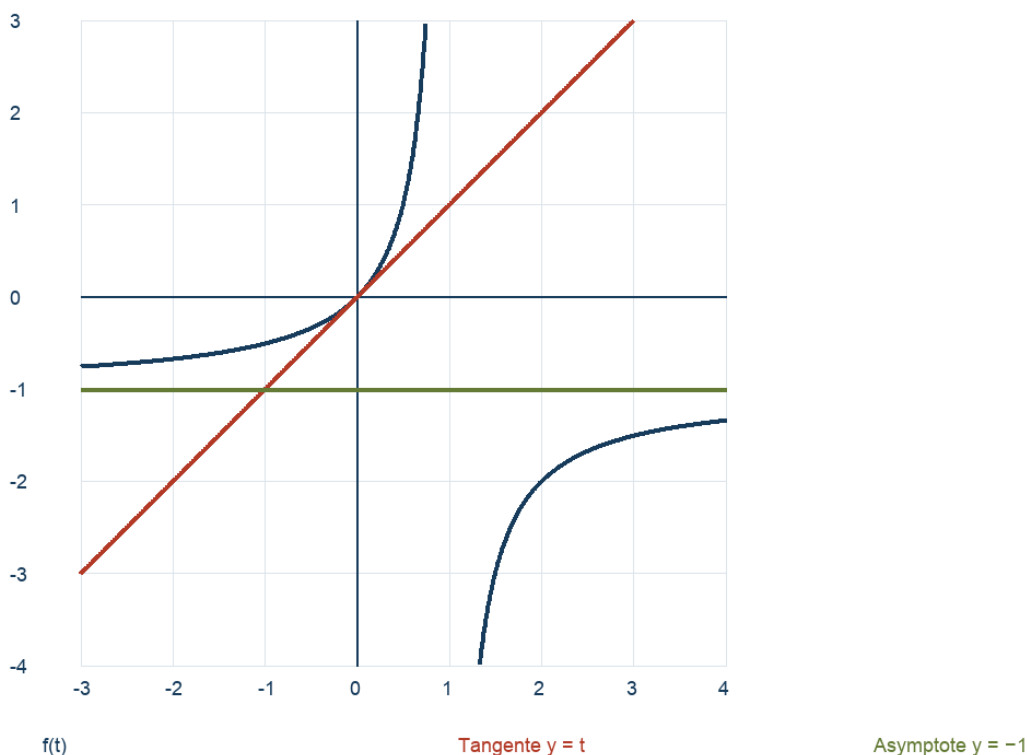
Intervalle	Limite à gauche	Limite à droite	Variation
$] -\infty ; t_0[$	-1	$+\infty$	croissante
$]t_0 ; +\infty[$	$-\infty$	-1	croissante

$t = t_0$ est une asymptote verticale ; $y = -1$ est une asymptote horizontale.

3 et 4. Tangente et tracé

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 1/t_0$: $T : y = t/t_0$. Pour $t_0 = 1$, la tangente est $y = t$; la courbe passe par $(0 ; 0)$, monte vers $+\infty$ avant $t = 1$, repart de $-\infty$ après $t = 1$ et tend vers $y = -1$.

PT 2026 : $f(t) = t/(1 - t)$, pour $t \neq 1$



Courbe de $f(t) = t/(1 - t)$, tangente $y = t$ et asymptotes $t = 1$ et $y = -1$.

5. Dérivée d'ordre n

Pour $n \geq 1$, $f^{(n)}(t) = n!t_0/(t_0 - t)^{n+1}$. Le cas $n = 1$ est établi. Dériver l'expression d'ordre n multiplie par $n + 1$ et augmente l'exposant du dénominateur : on obtient l'expression d'ordre $n + 1$. La récurrence prouve aussi la dérivabilité à tout ordre hors t_0 .

6. Primitives

Une primitive de g sur chacun des deux intervalles est $G(t) = -t_0 \ln|t_0 - t|$. Une primitive de f est $F(t) = -t - t_0 \ln|t_0 - t|$. On peut ajouter une constante indépendante sur chaque intervalle.

7. Taylor–Young

Si ψ est de classe C^n au voisinage de x_0 , alors, lorsque $x \rightarrow x_0$, $\psi(x) = \sum_{k=0}^n \psi^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k/k! + o((x - x_0)^n)$. Cette hypothèse est suffisante pour la formule demandée.

8. Développement de $1/(1 - t)$

La fonction est définie pour $t \neq 1$. L'identité géométrique donne $1/(1 - t) = 1 + t + \dots + t^n + t^{n+1}/(1 - t)$. Le dernier terme est $o(t^n)$ près de 0.

9. Développement du logarithme

$\ln(1 - t)$ est défini pour $t < 1$. En intégrant le développement de sa dérivée $-1/(1 - t)$ à partir de 0, on obtient $\ln(1 - t) = -t - t^2/2 - \dots - t^n/n + o(t^n)$.

Partie I : série de logarithmes

1. Primitive

$1/(t + t^2) = 1/t - 1/(1 + t)$, pour $t > 0$. Une primitive est $H(t) = \ln t - \ln(1 + t)$.

2. Intégrale à l'infini

L'intégrande est équivalent à $1/t^2$ à l'infini, donc intégrable. La limite de $H(t)$ est 0. Ainsi $\int_n^\infty dt/(t + t^2) = \ln(1 + 1/n)$.

3. Expression de u_n

La dérivée de $\ln[n + \cos(nt)]$ est $-n \sin(nt)/[n + \cos(nt)]$. Le dénominateur est positif pour $n \geq 2$.

L'intégrale du premier terme vaut $\ln[n + (-1)^n] - \ln(n + 1)$. En ajoutant $\ln[(n + 1)/n]$, on obtient $u_n = \ln[1 + (-1)^n/n]$.

4 et 5. Limite et combinaison de séries

Le terme à l'intérieur du logarithme tend vers 1 : $u_n \rightarrow 0$.

Si les sommes partielles de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ tendent respectivement vers A et B, celles de $\sum (a_n + \lambda b_n)$ tendent vers $A + \lambda B$. Cela prouve la convergence et la linéarité de la somme.

6. Convergence et convergence absolue

Le développement limité donne $u_n = (-1)^n/n - 1/(2n^2) + O(1/n^3)$. La série alternée du premier terme converge ; les séries des deux autres termes convergent absolument. $\sum u_n$ converge.

Mais $|u_n|$ est équivalent à $1/n$, donc la convergence n'est pas absolue.

7a. Sommes paires

Les termes s'associent deux à deux : pour $j \geq 1$, $u_{2j} = \ln[(2j + 1)/(2j)]$ et $u_{2j+1} = \ln[(2j)/(2j + 1)]$; leur somme vaut 0. Jusqu'à $2N$, il reste seulement u_{2N}^N : $S_{2N}^N = \ln[(2N + 1)/(2N)]$.

7b à 7d. Sommes impaires et somme totale

$u_{2n+1} = -u_{2n}$. Donc $S_{2N-1}^N = 0$ pour $N \geq 2$. Les sommes paires tendent également vers 0 : $\sum_{n=2}^\infty u_n = 0$.

Partie II : intégrales dépendant d'un paramètre

Posons $L = \ln x > 0$. L'intégrande de G_n est $t^n e^{-nLt}$.

1. Convergence

Près de 0, l'intégrande est continue ; à l'infini, l'exponentielle décroissante domine t^n . $G_n(x)$ converge pour $x > 1$.

2. Continuité sur $[a ; +\infty[$

Pour $x \geq a > 1$, $0 \leq t^n x^{-nt} \leq t^n a^{-nt}$. Ce majorant est intégrable et l'intégrande est continue en x . La convergence dominée donne la continuité.

3. Dérivation

La dérivée en x de l'intégrande est $-nt^{n+1}x^{-nt-1}$. Sa valeur absolue est au plus $(n/a)t^{n+1}a^{-nt}$, majorant intégrable. On peut donc dériver sous l'intégrale : $G'_n(x) = -(n/x) \int_0^\infty t^{n+1}x^{-nt} dt$. Au point a , l'expression se lit aussi comme dérivée de la fonction définie sur $]1; +\infty[$.

4. Récurrence

Dans G_{n+1} , posons $u = (n+1)t/n$. On obtient le facteur $[n/(n+1)]^{n+2}$ devant $\int u^{n+1}x^{-nu} du$. Une intégration par parties donne cette dernière intégrale égale à $(n+1)/(n \ln x) \times G_n(x)$. D'où $G_{n+1}(x) = [1/\ln x][n/(n+1)]^{n+1} G_n(x)$.

5. Premier terme

L'intégration par parties, ou l'intégrale de te^{-Lt} , donne $G_1(x) = 1/(\ln x)^2$.

6. Formule explicite avec récurrence

$G_n(x) = n!/[n^{n+1}(\ln x)^{n+1}]$. La formule vaut pour $n = 1$. En l'insérant dans la récurrence de la question 4, on obtient $n!n^{n+1}/[(n+1)^{n+1}n^{n+1}(\ln x)^{n+2}]$, soit $n!/(n+1)^{n+1}(\ln x)^{n+2}$, égal à la formule annoncée au rang $n+1$.

7. Série

$n^n G_n(x)/(n-1)! = 1/(\ln x)^{n+1}$. C'est une série géométrique à termes positifs. Elle converge **si et seulement si** $\ln x > 1$, donc $x > e$. Dans ce cas, sa somme vaut $S(x) = 1/[\ln x(\ln x - 1)]$. Pour $x = e$, tous les termes valent 1 ; pour $1 < x < e$, ils ne tendent pas vers 0.

8. Limite

Le produit de l'énoncé vaut $\exp(S_2^N) = (2N+1)/(2N)$. Donc $\prod_n = e(2N+1)/(2N) \rightarrow e$. Pour n fixé, la continuité de G_n donne $\lim G_n(\prod_n) = G_n(e) = n!/n^{n+1}$. L'indice du produit est ici N , distinct du n fixé de G_n .

Partie III : deux variables

1. Hessienne

En posant $d = x - y \neq 0$:

$$H = [[2 + 1/d^2, -1/d^2], [-1/d^2, 2 + 1/d^2]].$$

2 et 3. Points critiques

Les dérivées premières sont $2x - 1/(x-y)$ et $2y + 1/(x-y)$. Leur annulation donne $x = -y = 1/[2(x-y)]$. En remplaçant y par $-x$: $4x^2 = 1$. Les points critiques sont $(1/2; -1/2)$ et $(-1/2; 1/2)$.

4. Minimum

Aux deux points, la hessienne est $[[3, -1], [-1, 3]]$, de valeurs propres **2 et 4**, toutes deux positives. Chaque point est un minimum local strict ; la valeur de ϕ y est **1/2**.

Pour obtenir une minoration globale, on complète l'argument local : avec $u = x - y$ et $v = x + y$, $\varphi = (u^2 + v^2)/2 - \ln|u|$. La fonction $u^2/2 - \ln|u|$ atteint son minimum $1/2$ pour $|u| = 1$, tandis que $v^2/2 \geq 0$. Ainsi $\varphi(x,y) \geq 1/2$ sur tout son domaine.

5. Estimation des sommes

Pour $z = 1 + (-1)^n/n$, $n \geq 2$, on a $1/2 \leq z \leq 3/2$. La minoration avec $(x,y) = (z,0)$ donne $\ln z \leq z^2 - 1/2 \leq 7/4$. Avec $(1/z,0)$, elle donne $-\ln z \leq 1/z^2 - 1/2 \leq 7/2$. Donc $|\ln z| \leq 7/2$, et la somme de $N - 1$ termes est au plus $(7/2)(N - 1)$: **elle est $O(N)$** .

Cette borne linéaire n'établit pas la convergence : une somme de termes positifs peut être $O(N)$ et diverger. La partie I montre d'ailleurs que la série des valeurs absolues diverge. Il faut une estimation plus fine que cette minoration pour décider de la convergence.