

Corrigé CCINP 2026 PSI — Mathématiques

Proposition de corrigé — non officielle. Concours commun INP 2026, filière PSI, mathématiques, quatre heures sans calculatrice. Les deux exercices et le problème des huit pages sont entièrement traités.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Exercice 1 — Un jeu de pile ou face

Q1. Dérivées

$f(x) = 1/(1-x)$ est indéfiniment dérivable sur $] -1, 1[$. Une récurrence donne $f^{(k)}(x) = k!/(1-x)^{k+1}$: la formule vaut pour $k = 0$, et sa dérivée fournit le facteur $k + 1$ au rang suivant.

Q2. Série dérivée

La série géométrique $\sum$ de $n = 0$ à l'infini x^n a pour somme $f(x)$ et rayon de convergence 1. On peut la dériver k fois terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence. Avec Q1 :

$$\sum \text{ de } n = k \text{ à l'infini } n!/(n-k)! \times x^{n-k} = k!/(1-x)^{k+1}.$$

Q3. Loi de X

X compte les lancers jusqu'au premier succès inclus : **X suit la loi géométrique de paramètre p sur les entiers strictement positifs**, avec $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$.

Q4. Loi conditionnelle de Y

Conditionnellement à $X = n$, le joueur 2 effectue n essais indépendants de probabilité de succès p . Donc **$Y \mid (X = n)$ suit $B(n, p)$** . Pour $0 \leq k \leq n$, la probabilité vaut $C(n, k)p^k(1-p)^{n-k}$; pour $k > n$, elle vaut 0.

Q5. Probabilités totales

Les événements $\{X = n\}$, $n \geq 1$, forment une partition presque sûre. Pour $k \geq 0$: **$P(Y = k) = \sum \text{ de } n = 1 \text{ à l'infini } P(Y = k \mid X = n)P(X = n)$** .

Q6. Aucun pile

En utilisant Q4 :

$$P(Y = 0) = \sum \text{ de } n = 1 \text{ à l'infini } p(1-p)^{2n-1} = p(1-p)/(1-(1-p)^2) = (1-p)/(2-p).$$

Q7. Au moins un pile

Pour $k \geq 1$, poser $r = (1-p)^2$. Les termes $n < k$ sont nuls, puis :

$$P(Y = k) = p^{k+1}(1-p)^{k-1} \sum \text{ de } n = k \text{ à l'infini } C(n, k)r^{n-k}.$$

Q2, divisée par $k!$, donne la somme $1/(1-r)^{k+1}$. Comme $1-r = p(2-p)$, on trouve $P(Y = k) = (1-p)^{k-1}/(2-p)^{k+1}$. La somme sur $k \geq 1$ vaut $1/(2-p)$, qui complète bien la probabilité de Q6 pour donner 1.

Exercice 2 — Caractérisation de Gamma

Q8. Existence et positivité

Au voisinage de 0, l'intégrande $t^{x-1}e^{-t}$ est équivalent à t^{x-1} , intégrable lorsque $x > 0$. À l'infini, la décroissance exponentielle domine la puissance t^{x-1} ; par exemple, l'intégrande est majoré par une constante multipliée par $e^{-t/2}$ pour t assez grand. L'intégrale converge. Son intégrande étant strictement positif, $\Gamma(x) > 0$.

Q9. Relation fonctionnelle

Une intégration par parties donne $\Gamma(x+1) = [-t^x e^{-t}]$ de 0 à l'infini $+ x \int$ de 0 à l'infini $t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$. Les termes de bord sont nuls puisque $x > 0$.

Q10. Domination locale uniforme

Pour $0 < t \leq 1$ et $x \geq a$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ et $e^{-t} \leq 1$. Pour $t > 1$ et $x \leq b$, on a $t^{x-1} \leq t^{b-1}$. L'intégrande est donc majoré par $\varphi(t)$ dans les deux domaines, uniformément pour x dans $[a, b]$.

Q11. Intégrabilité des dominantes

Pour $k = 0, 1$ ou 2 , près de 0, le changement $t = e^{-s}$ transforme $\int$ de 0 à 1 $|\ln t|^k t^{a-1} dt$ en $\int$ de 0 à l'infini $s^k e^{-as} ds$, qui converge. À l'infini, $(\ln t)^k t^{b-1} e^{-t}$ est encore majoré par une constante multipliée par $e^{-t/2}$. Ainsi chaque ψ_k est intégrable.

Q12. Dérivation sous l'intégrale

Les deux dérivées en x de l'intégrande sont $(\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ et $(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$. Q10 et Q11 fournissent les dominations intégrables uniformes nécessaires sur chaque segment $[a, b]$. Ces segments peuvent couvrir un voisinage de tout $x > 0$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne Γ de classe C^2 et :

$$\Gamma'(x) = \int \text{de } 0 \text{ à l'infini } (\ln t)t^{x-1}e^{-t} dt ; \Gamma''(x) = \int \text{de } 0 \text{ à l'infini } (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t} dt.$$

Q13. Produit scalaire

L'intégrale de uv est bilinéaire et symétrique. Elle vérifie $\langle u, u \rangle = \int u^2 \geq 0$. Si u est une fonction continue non nulle, elle reste de valeur absolue strictement positive sur un petit intervalle autour d'un point où elle ne s'annule pas ; l'intégrale de u^2 est alors strictement positive. Ainsi $\langle u, u \rangle = 0$ implique $u = 0$: il s'agit bien d'un produit scalaire.

Q14. Log-convexité

Sur $[\alpha, \beta]$, appliquer Cauchy-Schwarz à $u(t) = t^{(x-1)/2} e^{-t/2}$ et $v(t) = (\ln t)u(t)$. Laisser α tendre vers 0 et β vers l'infini ; les intégrales convergent d'après les questions précédentes. On obtient $(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$.

Comme $\Gamma > 0$, $(\ln \Gamma)'' = (\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2)/\Gamma^2 \geq 0$: $\ln \Gamma$ est convexe. Enfin $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. Avec Q9, les trois conditions de (S) sont vérifiées.

Q15. Itération

L'itération de $f(x+1) = xf(x)$ donne $f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x)$, avec un produit vide égal à 1 pour $n=0$. En prenant $x=1$: $f(n+1) = n!$ et $g(n+1) = \ln(n!)$.

Q16. Passage au logarithme

Appliquer Q15 avec $n+1$, puis prendre le logarithme : $g(x+n+1) = g(x) + \ln(x(x+1)\cdots(x+n))$.

Q17. Encadrement des pentes

Fixer le point $a = n+1$ dans le lemme de convexité et comparer les points n , $n+1+x$ et $n+2$, où $0 < x \leq 1$. Les pentes des sécantes sont ordonnées, d'où :

$$g(n+1) - g(n) \leq (g(x+n+1) - g(n+1))/x \leq g(n+2) - g(n+1).$$

Par Q15, les bornes sont $\ln n$ et $\ln(n+1)$.

Q18. Formule limite

Remplacer $g(x+n+1)$ avec Q16, multiplier par x et exponentier. On obtient :

$$n^x n! / (x(x+1)\cdots(x+n)) \leq f(x) \leq (n+1)^x n! / (x(x+1)\cdots(x+n)).$$

Si A_n désigne la borne inférieure, le rapport entre les deux bornes vaut $(1+1/n)^x$ et tend vers 1. Ainsi $f(x)/(1+1/n)^x \leq A_n \leq f(x)$. Le théorème d'encadrement prouve la limite annoncée.

Q19. Identification sur $]0, 1]$

Γ vérifie (S) par Q14 : le raisonnement de Q18 s'applique également à elle. Pour $0 < x \leq 1$, $f(x)$ et $\Gamma(x)$ sont donc limites de la même suite A_n , et $f(x) = \Gamma(x)$.

Q20. Identification sur tout le domaine

Pour tout $x > 0$, écrire $x = y + m$ avec m entier naturel et $0 < y \leq 1$. L'itération de la relation fonctionnelle donne $f(x) = y(y+1)\cdots(y+m-1)f(y)$, et la même expression pour Γ . Puisque $f(y) = \Gamma(y)$, on obtient $f = \Gamma$ sur $]0, +\infty[$.

Problème — Endomorphismes à blocs de taille 1 ou 2

Q21. Matrice de u

Dans la base $(1, X, X^2)$, on a $u(1) = 0$, $u(X) = 1$ et $u(X^2) = 2X^2 + 2X$. La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La valeur propre 0 a multiplicité algébrique 2, mais son espace propre est de dimension 1, engendré par 1. **u n'est pas diagonalisable.**

Q22. Noyau de u^2

Pour $P = aX^2 + bX + c$, $u^2(P) = 4aX^2 + 4aX + 2a$. Il s'annule exactement si $a = 0$. Ainsi $\ker u^2 = K_1[X]$. Ce noyau est stable par u , car $u^2(u(P)) = u(u^2(P)) = 0$ lorsque $u^2(P) = 0$.

Q23. Base par blocs

Prendre $B = (2X^2 + 2X + 1, 1, X)$. Ces polynômes sont indépendants et forment une base. Le premier est un vecteur propre de valeur propre 2, $u(1) = 0$ et $u(X) = 1$. On obtient exactement le bloc scalaire 2 puis le bloc J demandé. Donc u appartient à D .

Q24. Matrice de v

La dérivation envoie 1 sur 0, X sur 1 et X^2 sur $2X$. Dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q25. Droites stables

Sur une droite stable, v agit comme une multiplication par une valeur propre. Comme v est nilpotent, cette valeur propre est 0. Or $\ker v$ est la droite des constantes. **La seule droite stable est $K \cdot 1$.**

Q26. Plans stables

Le plan $K_1[X]$ est stable. Un plan stable contenant un polynôme P de degré 2 contiendrait aussi P' et P'' . Ces trois polynômes, de degrés 2, 1 et 0, sont indépendants, ce qui contredit la dimension 2. Tout plan stable est donc contenu dans $K_1[X]$; par égalité des dimensions, **$K_1[X]$ est le seul.**

Q27. v n'appartient pas à D

En dimension 3, une décomposition en blocs de taille 1 ou 2 comporte au moins une droite. La seule droite stable est $K \cdot 1$. Trois droites stables ne peuvent donner une somme directe de dimension 3 ; et la seule combinaison droite-plan possible utilise $K \cdot 1$ et $K_1[X]$, dont l'intersection est non nulle. Ainsi **v n'appartient pas à D .**

Q28. D n'est pas un sous-espace

L'endomorphisme $w = v - u$ envoie P sur $-X^2P''$. Sa matrice canonique est $\text{diag}(0, 0, -2)$, donc w appartient à D . Pourtant u et w sont dans D alors que **$u + w = v$ ne l'est pas**. D n'est pas stable par addition.

Q29. Dimension 1

Un endomorphisme de dimension 1 est scalaire. S'il est nilpotent, son scalaire est nul : **$u = 0$** , d'indice de nilpotence 1.

Q30. Famille de puissances

Considérer une relation $\sum_{j=0}^{k-1} c_j u^j(x) = 0$. Si un coefficient est non nul, soit j le plus petit indice correspondant. Appliquer u^{k-1-j} : tous les termes d'indice supérieur sont nuls, et il reste $c_j u^{k-1}(x) = 0$, contradiction. La famille est libre, quelle que soit l'ordre de ses termes.

Q31. Dimension 2

Q30 fournit une famille libre de k vecteurs dans un espace de dimension 2, donc $k \leq 2$. Puisque u est non nul, $k \neq 1$: **$k = 2$ et $u^2 = 0$.**

Q32. Inclusion $D \cap N \subset N_2$

Dans la décomposition stable définissant D , les restrictions d'un endomorphisme nilpotent sont nilpotentes. Sur une droite, elles sont nulles par Q29 ; sur un plan, leur carré est nul par Q31, ou immédiatement si la restriction est nulle. Le carré de u est nul sur tous les blocs, donc sur E : **$u \in N_2$.**

Q33. Image et noyau

Si $y = u(x)$, alors $u(y) = u^2(x) = 0$. Donc **$\text{Im } u \subset \text{ker } u$** . Le théorème du rang donne $\dim \text{ker } u = n - r$; l'inclusion entraîne **$r \leq n - r$** , soit $2r \leq n$.

Q34. Base de E

Dans une relation $\sum_{i=1}^{n-r} a_i e_i + \sum_{j=1}^r b_j f_j = 0$, appliquer u . Il reste $\sum b_j e_j = 0$; les $e_1, \dots, e_r$ sont indépendants, donc tous les b_j sont nuls. Les autres coefficients sont alors nuls puisque les e_i forment une base du noyau. La famille est libre et possède n éléments : **c'est une base de E .**

Q35. Base donnant les blocs J

Réordonner cette base en :

$$B = (e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r).$$

Les $n - 2r$ premiers vecteurs sont annulés par u . Sur chaque paire (e_i, f_i) , $u(e_i) = 0$ et $u(f_i) = e_i$, d'où le bloc J . La matrice obtenue est donc $\text{diag}(0_{n-2r}, J, \dots, J)$, avec r blocs J . Les premières coordonnées absentes lorsque $n = 2r$ et les paires absentes lorsque $r = 0$ sont simplement omises.

Q36. Égalité

Q35 montre que tout u de carré nul appartient à D ; il est évidemment nilpotent. L'inclusion inverse est Q32. Ainsi **$N_2 = D \cap N$.**

Q37. Identité de Bézout

L'application φ est linéaire entre deux espaces de dimension 4. Si $(X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 0$, la coprimauté des deux carrés impose que $(X - a)^2$ divise B . Comme $\deg B \leq 1$, $B = 0$, puis $A = 0$. Le noyau est nul, donc **φ est un isomorphisme**. Le polynôme constant 1 possède un antécédent, donnant l'identité demandée.

Q38. Intersection des noyaux

Appliquer l'identité de Q37 à u . Les polynômes en u commutent. Pour x dans les deux noyaux, les deux termes de l'identité appliquée à x sont nuls, donc $x = 0$. Ainsi **$\text{ker}(u - aI)^2 \cap \text{ker}(u - bI)^2 = \{0\}$.**

Q39. Somme des espaces propres

Dans une relation $\sum x_i = 0$ avec x_i dans $\text{ker}(u - \alpha_i I)$, appliquer $\prod$ sur les indices $h \neq i$ de $(u - \alpha_i I)$. Tous les termes sauf x_i sont annulés ; son coefficient est $\prod_{h \neq i} (\alpha_i - \alpha_h)$, non nul. Donc $x_i = 0$ pour chaque i : **la somme est directe**.

Q40. Ajout des noyaux doubles

Procéder par récurrence sur q ; le cas $q = 0$ est Q39. Dans une relation entre les sous-espaces avec q noyaux doubles, appliquer $(u - \beta_q I)^2$. Le dernier terme est annulé, et les autres restent dans leurs sous-espaces respectifs. L'hypothèse de récurrence montre que chacun de leurs images est nul.

Sur un espace propre associé à α_i , l'opérateur appliqué est le scalaire non nul $(\alpha_i - \beta_q)^2$. Sur $\ker(u - \beta_j I)^2$ avec $j < q$, écrire $u = \beta_j I + N$, où $N^2 = 0$. Avec $c = \beta_j - \beta_q \neq 0$, $(u - \beta_q I)^2 = c^2 I + 2cN$ est inversible, d'inverse $c^{-2} I - 2c^{-3} N$. Ainsi tous les termes précédents sont nuls ; le dernier l'est aussi par la relation initiale. La somme est directe.

Q41. Base de polynômes

Supposer une relation linéaire entre les P_i , Q_j et R_j . Évaluer en α_i : seul P_i y est non nul, donc son coefficient est nul. Évaluer ensuite en β_j : seul R_j y est non nul, donc son coefficient est nul.

Il reste une relation entre les Q_j . Dériver et évaluer en β_j : $Q_j'(\beta_j) = R_j(\beta_j) \neq 0$, tandis que les autres Q ont une racine double en β_j . Tous les coefficients restants sont nuls. La famille est libre. Ses $p + 2q$ éléments appartiennent à $K_{p+2q-1}[X]$, de cette même dimension : **c'est une base**. Le raisonnement conserve son sens lorsque l'une des familles est vide.

Q42. Décomposition de E

Écrire $1 = \sum c_i P_i + \sum (d_j Q_j + e_j R_j)$ dans cette base, puis remplacer X par u . Puisque $P(u) = 0$:

- $P_i(u)x$ appartient à $\ker(u - \alpha_i I)$, car $(u - \alpha_i I)P_i(u)x = P(u)x = 0$;
- $Q_j(u)x$ appartient à $\ker(u - \beta_j I)$, donc au noyau double ;
- $R_j(u)x$ appartient à $\ker(u - \beta_j I)^2$.

L'identité décompose donc tout x de E dans la somme demandée. Celle-ci est directe par Q40 : **E est la somme directe des espaces propres simples et des noyaux doubles indiqués**.

Q43. Appartenance à D

Sur chaque espace propre simple, u est scalaire et une base quelconque donne des droites stables. Sur $F_j = \ker(u - \beta_j I)^2$, l'endomorphisme $v_j = u - \beta_j I$ a un carré nul. Q35-Q36 le décomposent en droites et plans stables ; ces mêmes sous-espaces sont stables par $u = \beta_j I + v_j$. Les blocs de u y sont des scalaires β_j ou des matrices $\beta_j I_2 + J$.

Réunir les bases sur la décomposition directe de Q42 donne une base de E avec uniquement des blocs de taille 1 ou 2. Ainsi **u appartient à D**.