

Corrigé Centrale-Supélec 2024 MP-MPI — Mathématiques 1

Proposition de corrigé — non officielle. Concours Centrale-Supélec 2024, filières MP et MPI, mathématiques 1 : quatre heures, calculatrice autorisée. Les 29 questions des quatre pages sont traitées.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Notations

Pour alléger les calculs, on note $G_k(x) = (x_1 \cdots x_k)^{1/k}$. Les séries à termes positifs peuvent d'abord être manipulées comme limites de sommes finies ; les échanges de sommes qui apparaissent en partie III sont justifiés par leur positivité.

I. Inégalité de Knopp

Q1. Jensen intégral

Sur une subdivision régulière de $[a, b]$ en m intervalles, choisir des points t_j . La convexité donne l'inégalité de Jensen finie :

$$\varphi\left(\frac{1}{m} \sum f(t_j)\right) \leq \frac{1}{m} \sum \varphi(f(t_j)).$$

Lorsque m tend vers l'infini, les sommes de Riemann convergent vers les intégrales normalisées. La continuité de φ permet de passer à la limite à gauche. On obtient l'inégalité annoncée. On suppose les intégrales ordinaires définies ; pour une composition non intégrable à une borne, une version par troncature est nécessaire, comme en Q5.

Q2. Limite de g en 0

La fonction f , continue par morceaux, est bornée sur un petit segment $[0, \delta]$, par une constante C . Alors $0 \leq g(x) \leq (C/x) \int_0^x t \, dt = Cx/2$, pour $0 < x \leq \delta$. Ainsi $g(x)$ tend vers 0.

Q3. Limite de g à l'infini

Écrire $g(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} f(t) \times 1_{\{[0,x]\}}(t) \, dt$. L'intégrande tend vers 0 pour tout t fixé et est compris entre 0 et $f(t)$. Puisque f est intégrable, le théorème de convergence dominée donne $g(x) \rightarrow 0$.

Q4. Intégrale de h

Poser $A(x) = \int_0^x t f(t) \, dt$, de sorte que $h(x) = A(x)/x^2$ et $g(x) = A(x)/x$. Sur un segment $[\varepsilon, R]$, une intégration par parties donne :

$$\int_{\varepsilon}^R h(x) \, dx = [-A(x)/x]_{\varepsilon}^R + \int_{\varepsilon}^R f(x) \, dx.$$

Les termes de bord sont $-g(R) + g(\varepsilon)$. Les Q2 et Q3 montrent qu'ils tendent vers 0. Comme $h \geq 0$, son intégrale converge et $\int h = \int f$ sur $[0, +\infty[$. La formule s'applique sur les morceaux de continuité puis se somme ; A est continue aux points de subdivision.

Q5. Inégalité ponctuelle

Appliquer Jensen avec l'exponentielle à $\ln(t f(t))$, sur $[0, x]$, en traitant $t = 0$ comme une borne impropre. On obtient :

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(t f(t)) dt\right) \leq \left(\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt\right).$$

Or $\frac{1}{x} \int_0^x \ln t dt = \ln x - 1$. Comme $\ln f(t) = \ln(t f(t)) - \ln t$, il vient :

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t) dt\right) \leq \left(\frac{e}{x^2} \int_0^x t f(t) dt\right) = e h(x).$$

La stricte positivité d'une fonction continue par morceaux ne garantit pas, à elle seule, que $\ln f$ possède partout une intégrale finie. Si son intégrale vaut $-\infty$, on définit le membre de gauche comme 0. Pour justifier Jensen dans ce cas, remplacer $\ln(t f(t))$ par son maximum avec $-m$; l'exponentielle est alors majorée par $t f(t) + e^{-m}$, puis laisser m tendre vers l'infini. La partie positive du logarithme est localement intégrable puisque f est localement bornée. Si l'on exige uniquement des intégrales à valeurs réelles, il faut ajouter l'intégrabilité locale de $\ln f$ aux hypothèses de l'énoncé.

Q6. Inégalité de Knopp

La quantité de gauche de Q5 est positive ou nulle et majorée par $e h$, qui est intégrable d'après Q4. Par comparaison :

$$\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t) dt\right) dx \leq e \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

On conserve la convention de Q5 si une intégrale logarithmique vaut $-\infty$.

Q7. Minimum de v_k

Pour $k \geq 2$, poser $L = \sum_{i=1}^{k-1} \ln a_i$. Alors $v_k(x) = \ln a_k + (L - (k-1)\ln a_k)/x$. Le numérateur est positif ou nul puisque $a_i \geq a_k$ pour $i < k$. Par conséquent, $v_k'(x) \leq 0$ sur $[k-1, k]$: le minimum est atteint en k . Pour $k = 1$, la fonction est constante et le résultat est immédiat.

Q8. Comparaison sur chaque intervalle

Sur $[k-1, k]$, l'intégrale moyenne de $\ln f$ vaut $v_k(x)$, à une valeur aux bornes près qui ne change pas l'intégrale. Q7 donne $v_k(x) \geq v_k(k) = (1/k) \sum_{i=1}^k \ln a_i$. L'exponentielle étant croissante et l'intervalle de longueur 1 :

$$\int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t) dt\right) dx \geq (a_1 \cdots a_k)^{1/k}.$$

Q9. Suite décroissante

Si $\sum a_k$ converge, la fonction en escalier f est intégrable et son intégrale vaut cette somme. Sommer Q8 puis appliquer Q6 donne $\sum (a_1 \cdots a_k)^{1/k} \leq e \sum a_k$. La convergence de la série de gauche découle aussi de la majoration de ses sommes partielles.

Q10. Suppression de la décroissance

Une suite positive sommable peut être réordonnée en une suite décroissante (d_k) : il n'existe qu'un nombre fini de termes au-dessus de chaque seuil positif, ce qui permet de choisir successivement les plus grands termes et assure que tous apparaissent. La somme est conservée. Pour chaque k , les k plus grands termes ont un produit au moins égal à celui des k premiers termes dans l'ordre original : $a_1 \cdots a_k \leq d_1 \cdots d_k$. L'inégalité prouvée pour (d_k) majore donc chaque somme partielle de la série initiale par $\sum a_k$. On peut ensuite passer à la limite.

II. Démonstration différentielle de Carleman

Q11. Gradients

Sur l'ouvert des coordonnées strictement positives, $\partial f / \partial x_k = f(x)/x_k$, tandis que $\nabla g_s = (1, \dots, 1)$.

Q12. Maximum sous contrainte

L'ensemble des coordonnées positives ou nulles de somme s est fermé et borné, donc compact. Le produit f , continu, y atteint un maximum. Au point $(s/n, \dots, s/n)$, il est strictement positif. Sur la frontière, une coordonnée est nulle et le produit vaut 0 : le maximum est donc atteint à un point dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Q13. Multiplicateur de Lagrange

Le gradient de la contrainte est non nul. Au maximum intérieur a , il existe λ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g_s(a)$, soit $f(a)/a_k = \lambda$ pour chaque k . Comme $f(a)$ et a_k sont positifs, $\lambda > 0$ et $a_k = f(a)/\lambda$.

Q14. Moyennes arithmétique et géométrique

Toutes les coordonnées du maximum sont égales ; leur somme impose $a_k = s/n$. Le produit maximum vaut $(s/n)^n$. Ainsi $(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq s/n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Si une coordonnée est nulle, la même inégalité est immédiate ; si toutes sont nulles, les deux membres valent 0. Cela couvre tout le domaine positif ou nul.

Q15. Gradients de F_n et h_n

Pour une coordonnée $x_j > 0$, seuls les termes G_k avec $k \geq j$ dépendent de x_j . On a :

$$\partial F_n / \partial x_j = (1/x_j) \sum_{k=j}^n G_k(x)/k ; \nabla h_n = (1, \dots, 1).$$

Q16. Existence du maximum

Le simplexe des coordonnées positives ou nulles de somme 1 est compact. F_n s'y prolonge continûment et y atteint un maximum. Le sujet admet ensuite que ce maximum est atteint dans l'intérieur à coordonnées strictement positives ; on utilise cette admission pour la suite.

Q17. Équations au maximum

Les multiplicateurs de Lagrange donnent $\sum_{k=j}^n y_k/k = \lambda a_j$, pour j de 1 à n , et $\sum a_j = 1$. Les termes sont positifs, donc $\lambda > 0$. Cela correspond exactement au système proposé, dont la première ligne contient $y_1 + y_2/2 + \cdots + y_n/n$.

Q18. Relations sur λ et ω_k

a) Sommer les n équations. Le terme y_k/k apparaît k fois, et la somme du membre droit vaut λ . Ainsi $\lambda = \sum y_k = M_n$.

b) Pour $k < n$, soustraire l'équation de rang $k + 1$ de celle de rang k : $y_k/k = \lambda(a_k - a_{k+1})$. Cela donne $y_k = \lambda \omega_k a_k$, avec $\omega_k = k(1 - a_{k+1}/a_k)$. La dernière équation donne $y_n = \lambda n a_n$, soit $\omega_n = n$. Tous les ω_k sont strictement positifs.

Q19. Inégalité élémentaire

L'inégalité $\ln(1 + u) \leq u$ pour $u \geq 0$, appliquée à $u = 1/(k + 1)$, donne $(k + 1)\ln((k + 2)/(k + 1)) \leq 1$. Exponentier puis inverser fournit $1/e \leq ((k + 1)/(k + 2))^{k+1}$.

Q20. Majoration des ω_k sous l'hypothèse $\lambda > e$

Comme $y_1 = a_1$, la relation de Q18 donne $\omega_1 = 1/\lambda < 1/e \leq 1/2$.

Pour $k < n$, l'identité $y_{k+1}^{k+1} = y_k^k a_{k+1}$ et Q18 entraînent :

$$\omega_{k+1}^{k+1} = (1/\lambda) \omega_k^k (1 - \omega_k/k)^{-k}.$$

Supposer $\omega_k \leq k/(k + 1)$. La fonction $u \mapsto u/(1 - u/k)$ est croissante pour $0 < u < k$; à $u = k/(k + 1)$, elle vaut 1. La relation précédente donne donc $\omega_{k+1}^{k+1} \leq 1/\lambda < 1/e \leq ((k + 1)/(k + 2))^{k+1}$. Par récurrence, $\omega_k \leq k/(k + 1)$ pour tous les rangs concernés.

Q21. Contradiction

Pour $k = n$, on aurait $\omega_n \leq n/(n + 1)$, alors que Q18 impose $\omega_n = n$. C'est impossible pour $n \geq 1$. L'hypothèse $\lambda > e$ est donc fautive : $M_n \leq e$, ce qui majore F_n pour tout point de coordonnées strictement positives de somme 1.

Q22. Passage à une suite sommable

Pour N fixé, poser $S_N = \sum_{j=1}^N a_j$ et $x_j = a_j/S_N$. L'homogénéité de chaque moyenne géométrique donne :

$$\sum_{k=1}^N (a_1 \cdots a_k)^{1/k} \leq e S_N \leq e \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Les sommes partielles de gauche croissent et sont bornées. Elles convergent ; leur limite satisfait l'inégalité de Carleman.

III. Raffinement de Carleman-Yang

Q23. Prolongement en 0

On a $\ln \varphi(t) = (1 - 1/t)\ln(1 - t)$. Comme $\ln(1 - t) = -t + O(t^2)$, cette expression tend vers 1 lorsque t tend vers 0. Ainsi $\varphi(0) = e$ fournit un prolongement continu.

Q24. Rayon de convergence

Le terme b_0 vérifie $|b_0| = 1$. Supposons $|b_j| \leq 1$ aux rangs précédents. La récurrence donne, pour $n \geq 1$:

$$|b_n| \leq (1/n) \sum_{k=1}^n 1/(k + 1) \leq 1.$$

L'induction établit la borne. Par comparaison à la série géométrique, **le rayon de convergence de $\sum b_k t^k$ est au moins 1.**

Q25. Équation différentielle et dérivées

Le développement de $\ln(1 - t)$ donne, pour $|t| < 1$:

$$\ln \varphi(t) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m(m+1)}.$$

Cette série se dérive terme à terme. On obtient $\varphi' = \varphi\psi$, où $\psi(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{(j+2)}$. Ce développement établit aussi la régularité à l'origine et $\psi^{(k)}(0) = -k!/(k+2)$.

En dérivant $n-1$ fois $\varphi' = \varphi\psi$ et en appliquant Leibniz :

$$\varphi^{(n)}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} C(n-1, k) k!/(k+2) \times \varphi^{(n-k-1)}(0).$$

Q26. Identification de la série

Définir $B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, valable pour $|t| < 1$. La récurrence des coefficients donne $B' = \psi B$: le coefficient de t^{n-1} est $n b_n = -\sum_{k=1}^n b_{n-k}/(k+1)$. Ainsi $G = -eB$ satisfait $G' = \psi G$ et $G(0) = e$, tout comme φ .

L'unicité pour cette équation différentielle linéaire donne $G = \varphi$. Comme $b_0 = -1$:

$$\varphi(t) = e(1 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k).$$

Cette argumentation prouve l'égalité à la fonction ; elle ne se contente pas d'identifier formellement ses dérivées en 0.

Q27. Inégalité avec poids

Appliquer Q14 aux n nombres $c_k a_k$. En divisant par $(c_1 \cdots c_n)^{1/n}$:

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq (1/n)(c_1 \cdots c_n)^{-1/n} \sum_{k=1}^n c_k a_k.$$

Sommer en n . L'échange des deux sommes est licite par positivité, même si l'on ne sait pas encore si elles sont finies. Il donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{\infty} (1/n)(c_1 \cdots c_n)^{-1/n}.$$

Q28. Choix des poids

Avec $c_n = (n+1)^n/n^{n-1}$, le produit se simplifie : $c_1 \cdots c_n = (n+1)^n$. La somme intérieure de Q27 vaut donc $\sum_{n=k}^{\infty} 1/(n(n+1)) = 1/k$.

Le coefficient de a_k est $c_k/k = ((k+1)/k)^k = \varphi(1/(k+1))$. Appliquer Q26 à ce nombre, compris entre 0 et 1, puis renommer l'indice extérieur n . On trouve :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k/(n+1)^k) a_n.$$

Q29. Positivité des coefficients et amélioration

La récurrence donne $b_1 = 1/2 > 0$. Pour $n \geq 2$, elle s'écrit :

$$n b_n = 1/(n+1) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j/(n-j+1).$$

Supposons les coefficients $b_1, \dots, b_{n-1}$ positifs. Pour $j \leq n-2$, on a $1/(n-j+1) \leq (n/(n+1))/(n-j)$. L'égalité de récurrence au rang $n-1$ permet alors de majorer la somme :

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j/(n-j+1) \leq (n/(n+1))(1/n - (n-1)b_{n-1}) + b_{n-1}/2.$$

On en déduit $n b_n \geq (n(n-1)/(n+1) - 1/2)b_{n-1} > 0$, le facteur étant positif pour $n \geq 2$. L'induction établit donc, plus précisément, $b_n > 0$ pour $n \geq 1$.

Pour chaque n , le coefficient de a_n dans Carleman-Yang vaut $\phi(1/(n+1))$, nombre positif et strictement inférieur à e puisque la somme soustraite contient $b_1/(n+1) > 0$. Le membre droit est ainsi plus petit que celui de Carleman. Si $\sum a_n$ est finie et non nulle, l'amélioration du majorant est stricte.