

Corrigé contrôleur DGCCRF 2024 : mathématiques

Proposition de corrigé — non officielle. Concours externe à dominante scientifique et technologique, session des 6 et 7 juin 2024, épreuve 2, option mathématiques. Durée : trois heures ; coefficient 2. Les quatre exercices sont intégralement traités.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Exercice 1 — Deux villes en croissance, 5 points

1. Populations en 2011

Une hausse de 2 % multiplie la population par 1,02. Pour A : $4\,600 \times 1,02 = 4\,692$ habitants. Pour B, on ajoute 110 : $5\,100 + 110 = 5\,210$ habitants.

2. Nature des suites

$u_{n+1} = 1,02u_n$: (u_n) est géométrique, de raison 1,02 et de premier terme $u_0 = 4\,600$.

$v_{n+1} = v_n + 110$: (v_n) est arithmétique, de raison 110 et de premier terme $v_0 = 5\,100$.

3 et 4. Expressions et populations en 2020

Pour tout n naturel : $u_n = 4\,600 \times 1,02^n$ et $v_n = 5\,100 + 110n$.

2020 correspond à $n = 10$. Le modèle donne $u_{10} \approx 5\,607,374$, soit **5 607 habitants après arrondi à l'unité**, et $v_{10} = 6\,200$ habitants. Il est préférable de garder la valeur non arrondie pour les calculs suivants.

5. Quand A dépasse-t-elle B ?

Il faut résoudre, avec n entier naturel : $4\,600 \times 1,02^n > 5\,100 + 110n$. Un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice permet de chercher le premier rang satisfaisant cette inéquation.

Pour justifier qu'il s'agit bien du premier dépassement, posons $d_n = u_n - v_n$. Alors $d_{n+1} - d_n = 0,02u_n - 110$. Cette différence croît avec n : d_n diminue d'abord, puis augmente. Comme $d_0 = -500$, la première solution se situe sur la partie croissante. Les valeurs encadrant le dépassement sont données ci-dessous.

Année	n	Population A, environ	Population B
2041	31	8 499	8 510
2042	32	8 669	8 620

Les valeurs non arrondies sont $u_{31} \approx 8\,498,909$ et $u_{32} \approx 8\,668,887$. Le premier rang est donc $n = 32$, et le premier dépassement se produit en **2042**.

Exercice 2 — Nombres complexes, 5 points

Affirmation 1 — Fausse

$z - i = i(z + 1)$ équivaut à $(1 - i)z = 2i$, donc $z = -1 + i$. Son module est $\sqrt{2}$ et un argument est $3\pi/4$. La valeur proposée, $\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$, ne convient pas.

Affirmation 2 — Fausse

$1 + e^{2ix} = e^{ix}(e^{-ix} + e^{ix}) = 2\cos(x)e^{ix}$. Sur l'intervalle indiqué, $\cos(x) > 0$. La forme exponentielle correcte a donc pour argument x , et non $-x$. Par exemple, à $x = \pi/4$, le nombre vaut $1 + i$; l'expression proposée vaut $1 - i$.

Affirmation 3 — Vraie

En écrivant $z = x + iy$ et en élevant les modules au carré :

$$x^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + y^2, \text{ donc } y = -x.$$

Cette égalité est exactement l'équation proposée. La droite est la médiatrice du segment joignant les points d'affixes i et -1 .

Affirmation 4 — Fausse

Pour z réel, la partie imaginaire de $z^5 + z - i + 1$ vaut toujours -1 . Le nombre ne peut pas être nul. L'équation n'admet **aucune solution réelle**.

Affirmation 5 — Fausse

La formule d'Euler donne $c = (1/2)(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$, soit $c = (1/4)(1 + i\sqrt{3})$. L'expression proposée avec un signe moins est son conjugué.

Exercice 3 — Contrôle des aiguilles, 5 points

1 et 2. Probabilités et arbre

$P(A) = 0,75$ et $P(B) = 0,25$. Dans l'arbre, la branche notée $\bar{A}$ correspond à B , puisque les deux sites constituent toute la production.

Première branche	Probabilité	Branche suivante	Probabilité conditionnelle
A	0,75	D	0,02
A	0,75	D	0,98
B	0,25	D	0,04
B	0,25	D	0,96

3. Défaut provenant de A

On multiplie les probabilités le long d'un chemin : $P(A \cap D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$, soit 1,5 %.

4. Probabilité d'un défaut

Les provenances A et B forment une partition. La formule des probabilités totales donne $P(D) = 0,75 \times 0,02 + 0,25 \times 0,04 = 0,025$, soit 2,5 %.

5. Provenance d'une aiguille défectueuse

La probabilité demandée est $P(A | D) = P(A \cap D)/P(D) = 0,015/0,025 = 0,6$, soit **60 %**. Elle diffère de $P(D | A)$: connaître le défaut change la répartition des provenances.

Exercice 4 — Dérivée, graphique et aire, 5 points

1. Dérivée

Pour $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$, on obtient $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108 = -3(x - 2)(x - 18)$.

2. Tangente en zéro

La tangente a pour équation $y = h'(0)x + h(0)$, soit **$y = -108x - 490$** .

3. Variations sur [0 ; 26]

h' est négative avant 2, positive entre 2 et 18, puis négative après 18. Les valeurs sont $h(0) = -490$, $h(2) = -594$, $h(18) = 1\,454$ et $h(26) = -594$.

Intervalle	Signe de h' à l'intérieur	Variation de h
[0 ; 2]	-	-490 vers -594, décroissante
[2 ; 18]	+	-594 vers 1 454, croissante
[18 ; 26]	-	1 454 vers -594, décroissante

4. Identification des courbes

$C = C_2$, la courbe rouge, représente h : elle passe par (0 ; -490) et possède un minimum en 2 et un maximum en 18. **$C' = C_1$** , la parabole bleue, représente h' : elle s'annule en 2 et en 18 et est tournée vers le bas. La courbe noire en pointillés C_3 n'est ni h ni h' .

5. Aire

Sur [2 ; 18], C_1 représente h' et se situe au-dessus de l'axe des abscisses. L'aire est donc l'intégrale de h' :

$$A = \int_2^{18} h'(x) \, dx = h(18) - h(2) = 1\,454 - (-594) = 2\,048 \text{ unités d'aire.}$$

Il ne faut pas intégrer h , qui correspond à C_2 , ni ajouter une unité physique absente du repère.