

Corrigé ENS Lyon, second concours 2011 : physique

Proposition de corrigé — non officielle. Second concours de l'ENS de Lyon, session 2011, physique, épreuve de trois heures. L'exercice d'écoulement et les 18 questions du problème de diffusion thermique sont traités.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Partie I — Écoulement fluvial et torrentiel

I.1. Fluide parfait

Un fluide parfait est un modèle **sans viscosité**, donc sans contraintes tangentielles visqueuses ni dissipation correspondante. Cela ne signifie pas qu'il est nécessairement incompressible : cette propriété est une hypothèse distincte, fournie ici.

I.2. Relation de Bernoulli

Pour un écoulement stationnaire de fluide parfait incompressible, soumis à la pesanteur, sans apport mécanique entre les points, **$P + \rho g z + \rho v^2/2$ est constant le long d'une ligne de courant**. L'altitude z doit être mesurée depuis un même niveau de référence. La relation n'est pas un bilan valable sans précaution à travers un ressaut dissipatif.

I.3. Vitesse en aval

La surface libre est au contact de l'atmosphère : la pression y est P_0 aux deux points. Avec le fond pris au même niveau, les altitudes de surface sont h_0 et h . Bernoulli donne $gh_0 + v_0^2/2 = gh + v^2/2$, donc :

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)}.$$

On retient la vitesse positive dans le sens de l'écoulement. Le choix de la surface élimine les pressions hydrostatiques inconnues ; la vitesse uniforme sur une section permet de l'utiliser pour calculer le débit.

I.4. Signification de $\rho g \tilde{h}$

Avec $\tilde{h} = h_0 + v_0^2/(2g)$, on a **$\rho g \tilde{h} = \rho g h_0 + \rho v_0^2/2$** . C'est l'énergie mécanique par unité de volume, composée des contributions gravitationnelle et cinétique, après retrait de la pression atmosphérique et pour le niveau de référence choisi. Son unité est $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$, équivalente à Pa. $\tilde{h}$ est la charge spécifique.

I.5. Débit

La section vaut Lh . Ainsi $Q = Lhv = Lh\sqrt{2g(\tilde{h} - h)}$, pour $0 \leq h \leq \tilde{h}$ dans ce modèle. Q est en $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$.

I.6. Deux régimes

Pour $0 < Q < Q_{\max}$, la droite horizontale de débit coupe la courbe en deux points : l'un de **faible hauteur et grande vitesse**, l'autre de **grande hauteur et faible vitesse**.

La dérivée de Q^2 , proportionnel à $h^2(\bar{h} - h)$, s'annule pour $h_{\max} = 2\bar{h}/3$. À gauche, le régime est **torrentiel**, avec $v/\sqrt{gh} > 1$. À droite, le régime est **fluvial**, avec $v/\sqrt{gh} < 1$. Au maximum, le régime est critique et ce rapport, appelé nombre de Froude, vaut 1. Pour $Q = Q_{\max}$, les deux solutions se confondent.

I.7. Passage entre les piles d'un pont

Le débit total se conserve, mais L diminue : le débit par unité de largeur Q/L augmente. À charge $\bar{h}$ inchangée et sans perte, on se rapproche donc du sommet de la courbe.

- Sur la branche **fluviale**, la hauteur **diminue**, et la vitesse augmente.
- Sur la branche **torrentielle**, la hauteur **augmente**, et la vitesse diminue.

Cette réponse vaut tant que le débit peut être écoulé avec la charge disponible. Un rétrécissement trop important provoque un contrôle critique et peut modifier le niveau en amont ; on ne peut pas extrapoler les mêmes hypothèses à une largeur arbitrairement faible.

Partie II — Diffusion thermique

II.1. Dimension de D

λ s'exprime en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ et ρc en $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$. Ainsi $D = \lambda/(\rho c)$ s'exprime en $m^2 \cdot s^{-1}$ et a pour dimension $L^2 T^{-1}$. C'est la diffusivité thermique.

II.2. Loi de Fourier

Le vecteur de densité de flux thermique vaut $\mathbf{j} = -\lambda \text{grad } T$. En une dimension : $j_x = -\lambda \partial T / \partial x$. Le signe moins indique que la chaleur se transfère des régions chaudes vers les régions froides. La densité de flux s'exprime en $W \cdot m^{-2}$.

II.3. Bilan et équation de diffusion

Sur une tranche de section S et d'épaisseur dx , l'énergie stockée pendant dt est $\rho c S dx (\partial T / \partial t) dt$. L'énergie reçue vaut $[j_x(x) - j_x(x + dx)] S dt$, soit $-S dx (\partial j_x / \partial x) dt$ au premier ordre. Sans source interne et pour des coefficients constants :

$$\rho c \partial T / \partial t = -\partial j_x / \partial x = \lambda \partial^2 T / \partial x^2, \text{ donc } \partial T / \partial t = D \partial^2 T / \partial x^2.$$

II.4. Profil stationnaire

À l'état stationnaire, $T''(z) = 0$. Avec $T(0) = T_0$ et $T(e) = T_e$: $T(z) = T_0 + (T_e - T_0)z/e$. Le profil est linéaire et le flux surfacique constant vaut $\Phi = \lambda(T_0 - T_e)/e$, orienté vers les z croissants.

II.5. Analogie électrique et résistance

La différence de potentiel correspond à la **différence de température** ; l'intensité correspond à la **puissance thermique traversante**, notée ici $P_{th} = S\Phi$. La loi d'Ohm thermique s'écrit $T_0 - T_e = R_{th} P_{th}$, avec $R_{th} = e/(\lambda S)$ en $K \cdot W^{-1}$.

Le sujet définit Φ comme un flux **par unité de surface**. Si on veut l'utiliser directement, on doit employer une résistance surfacique $r_{th} = e/\lambda$, en $m^2 \cdot K \cdot W^{-1}$, et écrire $T_0 - T_e = r_{th} \Phi$. Les deux

conventions ne doivent pas être mélangées, surtout pour les surfaces différentes de la question suivante.

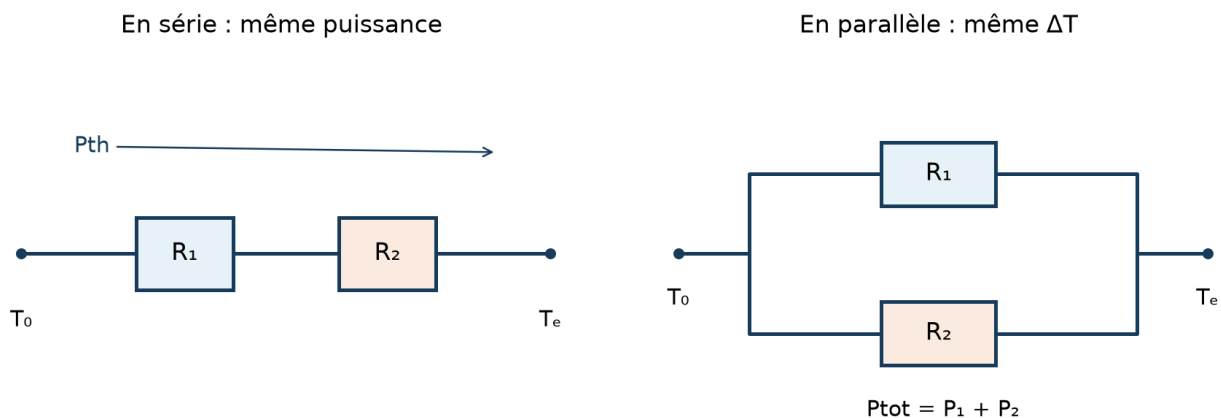
II.6. Deux plaques

a. Plaques successives, en série. Sans stockage ni source à l'interface, la même puissance traverse les deux plaques. Comme leur section est la même, $\Phi_1 = \Phi_2$ également. Les chutes de température s'additionnent : $R_{tot} = R_1 + R_2$, pour les résistances en $K \cdot W^{-1}$. Le résultat d'addition vaut aussi pour les résistances surfaciques de plaques de même section.

b. Plaques contiguës, en parallèle. Les deux plaques ont la même différence de température. Les puissances s'additionnent : $P_{tot} = P_1 + P_2 = \Delta T(1/R_1 + 1/R_2)$, donc $1/R_{tot} = 1/R_1 + 1/R_2$.

Avec la définition surfacique de Φ et deux sections $S/2$, la relation exacte est $P_{tot} = (S/2)(\Phi_1 + \Phi_2)$. La densité de flux moyenne sur la surface S vaut donc $(\Phi_1 + \Phi_2)/2$, et non $\Phi_1 + \Phi_2$. L'addition directe des « flux » de l'énoncé est correcte seulement si ce mot désigne les puissances. Les R_1 et R_2 du montage parallèle doivent être calculées avec la section propre $S/2$ de chaque plaque.

c. Schémas équivalents. Dans le premier montage, R_1 puis R_2 sont parcourues par la même puissance thermique. Dans le second, les deux branches relient les mêmes températures et leurs puissances se rejoignent.



Résistances thermiques en série et en parallèle, avec la puissance thermique comme analogue du courant.

Formation de la glace

II.7. Flux fourni par l'air

En régime quasi stationnaire, T passe de $T_{air} < 0$ à la surface à 0 à la profondeur e . Avec l'axe dirigé vers le bas : $\Phi = -\lambda(0 - T_{air})/e = \lambda T_{air}/e < 0$. L'air ne fournit pas une puissance positive au lac : la chaleur est **extraite** de l'eau et dirigée vers le haut.

II.8. Solidification

La solidification est **exothermique** : l'eau libère de l'énergie en devenant glace. L'enthalpie massique de solidification vaut $-L$, où $L > 0$ est la chaleur latente de fusion fournie par le sujet.

II.9. Équation sur e

Pendant dt , la masse de glace formée sur une surface S vaut $\rho S de$. L'énergie libérée est $\rho L S de$. Elle est évacuée vers l'air par la conduction : $\rho L S de = -\Phi S dt = \lambda(-T_{\text{air}})S dt/e$. Donc :

$$de/dt = \beta/e, \text{ avec } \beta = \lambda(-T_{\text{air}})/(\rho L) > 0, \text{ en } m^2 \cdot s^{-1}.$$

II.10. Solution

En multipliant par e puis en intégrant : $e^2(t) - e^2(0) = 2\beta t$. Avec l'apparition du premier cristal à $t = 0$, on prend $e(0) = 0$, d'où $e(t) = \sqrt{2\beta t}$ pour $t > 0$. L'équation est singulière exactement à $e = 0$; cette expression est la limite du modèle après le début de formation.

II.11. Application numérique

Le temps pour atteindre e_c vaut $t_c = e_c^2/(2\beta) = \rho L e_c^2/[2\lambda(-T_{\text{air}})]$. Avec $e_c = 0,10 \text{ m}$, $\rho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $L = 320\,000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, $\lambda = 2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $T_{\text{air}} = -10^\circ \text{C}$:

$$\beta = 6,25 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } t_c = 80\,000 \text{ s} \approx 22,2 \text{ h} \approx 0,93 \text{ jour}.$$

L'ordre de grandeur est celui d'une journée dans le modèle, mais l'estimation suppose un air constamment froid, une interface directement à T_{air} et une conduction uniforme. Une résistance d'échange avec l'air, la neige, les mouvements de l'eau ou une variation de température modifient la formation. La résistance mécanique dépend aussi de l'état et de l'homogénéité de la glace : ce calcul théorique ne permet pas de décider qu'un lac réel serait praticable après 22 heures.

Température périodique dans une glace épaisse

II.12. Équation de Θ

T_0 étant constant, $\partial\Theta/\partial t = D \partial^2\Theta/\partial z^2$. Les conditions sont $\Theta(0, t) = A \cos(\omega t)$ et une perturbation bornée, tendant vers zéro lorsque z augmente indéfiniment.

II.13. Amplitude et phase à la surface

La solution complexe doit prendre la valeur $Ae^{i(\omega t)}$ à $z = 0$. Pour une amplitude A positive, $\Theta_0 = A$ et $\varphi = 0 \text{ modulo } 2\pi$. Si A était choisi négatif, on pourrait prendre $\Theta_0 = |A|$ et $\varphi = \pi$; le coefficient complexe de surface reste A .

II.14. Relation de dispersion

Pour $\Theta_c = Ae^{i[(\omega t - kz)]}$, on a $\partial t \Theta_c = i\omega \Theta_c$ et $\partial z z \Theta_c = -k^2 \Theta_c$. Ainsi $k^2 = -i\omega/D$.

II.15. Choix de la racine

En posant $\ell = \sqrt{2D/\omega}$, les racines sont $k = \pm(1 - i)/\ell$. Dans la convention $\exp[i(\omega t - kz)]$, la racine $(1 - i)/\ell$ donne le facteur décroissant $e^{-(z/\ell)}$. L'autre donne une croissance exponentielle en profondeur et doit être rejetée pour le milieu semi-infini.

II.16. Solution réelle

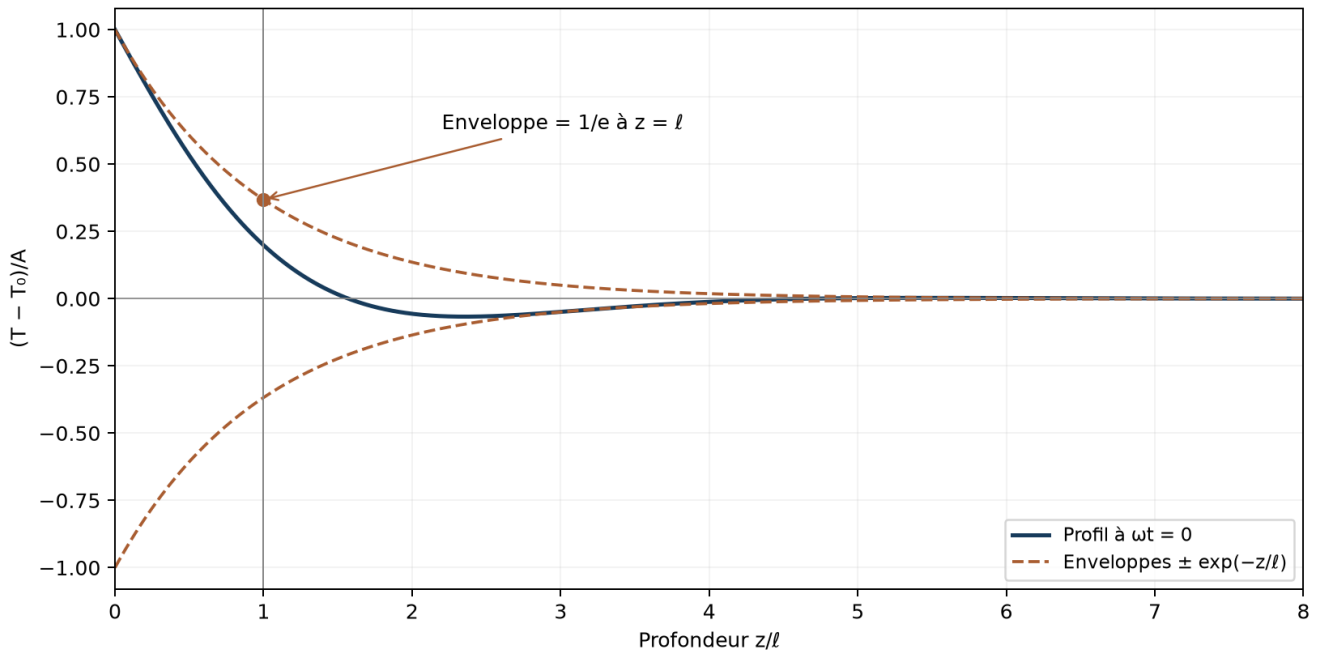
En prenant la partie réelle :

$$\Theta(z, t) = Ae^{-(z/\ell)} \cos(\omega t - z/\ell), \text{ donc } T(z, t) = T_0 + Ae^{-(z/\ell)} \cos(\omega t - z/\ell).$$

Il s'agit d'une **onde thermique amortie**, ou pseudo-onde de diffusion : l'amplitude décroît et la phase est retardée avec la profondeur. Elle satisfait l'équation de diffusion, et non l'équation d'une onde mécanique non dissipative.

II.17. Allure et lecture de ℓ

À un instant fixé, le profil oscille autour de T_0 à l'intérieur des enveloppes $T_0 \pm Ae^{(-z/\ell)}$. À la profondeur ℓ , l'amplitude de cette enveloppe vaut A/e . Le graphique suivant représente l'instant $\omega t = 0$.



Profil thermique normalisé à l'instant $\omega t = 0$; les enveloppes décroissent d'un facteur e sur une profondeur ℓ .

On lit ℓ sur **la décroissance de l'enveloppe**, pas en cherchant simplement $T(\ell, t) - T_0 = A/e$ sur un profil quelconque : le cosinus intervient aussi. Des mesures d'amplitude à différentes profondeurs permettent cette lecture.

II.18. Autres situations

Les oscillations quotidiennes ou saisonnières de la température du **sol**, et la réponse d'une **paroi épaisse** à une température extérieure périodique, fournissent d'autres exemples. Sous les hypothèses de conduction et de coefficients constants, on retrouve un amortissement de l'amplitude et un retard de phase avec la profondeur. Une période plus longue, donc une pulsation plus faible, donne une longueur de pénétration ℓ plus grande.