

ICNA et IEEAC 2026 : corrigé de mathématiques

Proposition de corrigé — non officielle. Concours interne ICNA et IEEAC, session 2026. Mathématiques obligatoires, durée quatre heures ; coefficient 2 pour ICNA et 4 pour IEEAC.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Exercice 1 — Suite et série de fonctions

On pose $f_n(x) = 1/(1+n^2x^2)$ pour $n \geq 1$.

Q1. Convergences de la suite

Si $x \neq 0$, $f_n(x)$ tend vers 0. À l'origine, $f_n(0) = 1$ pour tout n . La limite simple vaut donc 1 en 0 et 0 ailleurs. Elle est discontinue : une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ est impossible, puisque chaque f_n est continue. Directement, pour $x \neq 0$ arbitrairement proche de 0, $f_n(x)$ est arbitrairement proche de 1 ; le supremum de l'écart à la limite vaut 1.

Sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, $0 \leq f_n(x) \leq 1/(1+n^2a^2)$. Ce majorant tend vers 0 : la convergence y est uniforme.

Q2. Domaine de convergence de la série

En $x = 0$, tous les termes valent 1 : la série diverge. Si $x \neq 0$, $f_n(x) \leq 1/(n^2x^2)$ et la série de Riemann de terme général $1/n^2$ converge. Ainsi **D = $\mathbb{R}$ privé de 0**.

Q3. Parité, continuité et limite à l'infini

Chaque terme est pair, donc f est paire. Sur tout compact K de D , il existe $a > 0$ tel que $|x| \geq a$. La majoration par $1/(n^2a^2)$ assure la convergence normale, donc uniforme, sur K . La somme f est ainsi continue sur D .

Pour $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq (\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2)/x^2$. La constante étant finie, **$f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$** . Il n'est pas nécessaire de connaître la valeur exacte de cette constante.

Q4. Comparaison avec une intégrale et équivalent

Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto 1/(1+t^2x^2)$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 1$, son intégrale de k à $k+1$ est donc comprise entre ses valeurs aux deux extrémités, puisque l'intervalle a longueur 1.

En sommant puis en passant à la limite :

$$f(x) - 1/(1+x^2) \leq \int_1^{+\infty} dt/(1+t^2x^2) \leq f(x).$$

L'intégrale vaut $I(x) = (\pi/2 - \arctan x)/x$. On obtient l'encadrement :

$$I(x) \leq f(x) \leq I(x) + 1/(1+x^2).$$

Quand x tend vers 0 par valeurs positives, $x \ln(x) = \pi/2 - \arctan x$ tend vers $\pi/2$, tandis que $x/(1+x^2)$ tend vers 0. Le théorème des gendarmes donne $f(x) \sim \pi/(2x)$ au voisinage de 0^+ .

Q5. Dérivabilité de la somme

Les termes sont de classe C^1 et $f'_n(x) = -2n^2x/(1+n^2x^2)^2$. Sur $|x| \geq a > 0$:

$$|f'_n(x)| \leq 2/(n^2|x|^3) \leq 2/(n^2a^3).$$

La série des dérivées converge donc normalement sur tout compact de D . Comme la série des fonctions y converge aussi, le théorème de dérivation d'une série de fonctions s'applique. Ainsi f est de classe C^1 sur D et $f'(x) = \sum_{n \geq 1} -2n^2x/(1+n^2x^2)^2$.

Q6. Les trois intégrales

Une primitive de $e^{-(\lambda t)} \sin t$ est $e^{-(\lambda t)}(-\lambda \sin t - \cos t)/(1+\lambda^2)$. Aux bornes 0 et π , elle donne :

$$\int_0^\pi e^{-(\lambda t)} \sin t \, dt = (1+e^{-(\lambda \pi)})/(1+\lambda^2).$$

Sur chaque intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, $|\sin t|$ reproduit $\sin$ sur $[0, \pi]$. Après le changement de variable $t = k\pi + s$, les contributions sont multipliées par $e^{-(k\lambda \pi)}$. La somme géométrique donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda t)} |\sin t| \, dt = (1+e^{-(\lambda \pi)})/((1-e^{-(\lambda \pi)})(1+\lambda^2)).$$

Pour $\sin$ sans valeur absolue, le multiplicateur est $(-1)^k e^{-(k\lambda \pi)}$. La série géométrique de raison $-e^{-(\lambda \pi)}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda t)} \sin t \, dt = 1/(1+\lambda^2).$$

Ces intégrales convergent absolument, car $|\sin t| \leq 1$ et $\lambda > 0$.

Q7. Intégration terme à terme

a) Une version adaptée aux intégrales impropres est la suivante : si les fonctions g_n sont continues et intégrables sur un intervalle, si leur série converge simplement vers une fonction continue g , et si $\sum \int |g_n|$ est finie, alors g est intégrable et $\int g = \sum \int g_n$. L'hypothèse sur la somme des intégrales absolues justifie l'échange entre somme et intégrale.

b) Pour $x > 0$, prenons $g_n(t) = e^{-(nxt)} \sin t$. La question 6 donne $\int_0^{+\infty} g_n(t) \, dt = f_n(x)$. Elle donne également :

$$\int_0^{+\infty} |g_n(t)| \, dt = [(1+e^{-(nx\pi)})/(1-e^{-(nx\pi)})] f_n(x).$$

Le facteur entre crochets est au plus $(1+e^{-(x\pi)})/(1-e^{-(x\pi)})$, indépendant de n . La série de ces intégrales absolues converge donc, par Q2. Pour $t > 0$, la somme géométrique vaut :

$$\sum_{n \geq 1} g_n(t) = \sin t/(e^{(xt)}-1).$$

Cette fonction a une limite finie $1/x$ en 0 ; la valeur ponctuelle de la série en $t = 0$ peut être remplacée par ce prolongement sans changer l'intégrale. L'intégration terme à terme conduit à $f(x) = \int_0^{+\infty} \sin t/(e^{(xt)}-1) \, dt$.

Exercice 2 — Tirages avec remise

Les tirages sont indépendants. Notons $p = 6/7$ la probabilité d'une boule rouge et $q = 1/7$ celle d'une boule blanche ; $p+q = 1$. Une barre au-dessus d'un événement désigne son complément.

Q1. Les trois premiers événements

- $U_1 = R_1 \cap R_2 : u_1 = p^2 = 36/49$.
- $U_2 = \text{complément}(R_1) \cap R_2 \cap R_3 : u_2 = qp^2 = 36/343$.
- $U_3 = \text{complément}(R_2) \cap R_3 \cap R_4 : R_1$ peut être rouge ou blanche. La blanche au deuxième tirage empêche toute paire antérieure. $u_3 = qp^2 = 36/343$.

Q2. Relation de récurrence

Pour que la première paire commence au rang $n+2$, distinguons le premier tirage. S'il est blanc, on repart au deuxième tirage : la paire cherchée commence au rang $n+1$ dans la suite restante, ce qui apporte $q u_{n+1}$. S'il est rouge, le deuxième doit être blanc pour empêcher une paire immédiate. Les deux premiers tirages ont alors probabilité pq , puis la paire commence au rang n dans la suite restante. D'où $u_{n+2} = q u_{n+1} + pq u_n = u_{n+1}/7 + 6u_n/49$.

Q3. Expression de u_n

L'équation caractéristique est $r^2 - r/7 - 6/49 = 0$, de racines $3/7$ et $-2/7$. Écrivons $u_n = A(3/7)^{(n-1)} + B(-2/7)^{(n-1)}$. Les valeurs u_1 et u_2 donnent $A+B = 36/49$ et $3A-2B = 36/49$, donc $A = 108/245$ et $B = 72/245$.

$$u_n = (108/245)(3/7)^{(n-1)} + (72/245)(-2/7)^{(n-1)}, \text{ pour } n \geq 1.$$

Q4. Somme et interprétation

Les deux séries géométriques convergent :

$$\sum_{n \geq 1} u_n = (108/245)/(1-3/7) + (72/245)/(1+2/7) = 27/35 + 8/35 = 1.$$

Les événements U_n sont deux à deux incompatibles. Leur réunion est l'événement « au moins une paire de rouges consécutives apparaît ». Sa probabilité vaut donc 1 : la première paire arrive presque sûrement à un rang fini.

Q5. Valeurs de x_2, y_2, x_3 et y_3

À deux tirages, X_2 correspond à blanc-rouge, donc $x_2 = qp = 6/49$. Y_2 correspond à un deuxième tirage blanc, quel que soit le premier, donc $y_2 = q = 1/7$.

Pour finir par rouge sans paire à trois tirages, il faut être dans Y_2 puis tirer rouge : $x_3 = py_2 = 6/49$. Pour finir par blanc, on peut partir de X_2 ou Y_2 puis tirer blanc : $y_3 = q(x_2+y_2) = 13/343$.

Q6. Relation avec u_n

U_n se réalise exactement si X_n est réalisé puis si le tirage $n+1$ donne rouge. Par indépendance, $u_n = px_n = 6x_n/7$, pour $n \geq 2$.

Q7. Transitions

Depuis X_n , tirer rouge créerait une paire : $P(X_{n+1} | X_n) = 0$. Depuis Y_n , tirer rouge est permis : $P(X_{n+1} | Y_n) = p = 6/7$. Tirer blanc reste permis depuis les deux états : $P(Y_{n+1} | X_n) = P(Y_{n+1} | Y_n) = q = 1/7$.

On obtient $x_{n+1} = py_n$ et $y_{n+1} = q(x_n + y_n)$, avec $p = 6/7$ et $q = 1/7$. Ces probabilités ne totalisent pas toujours 1 : les trajectoires ayant déjà rencontré une paire sont sorties des états X et Y.

Q8. Diagonalisation et seconde expression

La matrice $M = (1/7)[[0,6],[1,1]]$ admet les valeurs propres $3/7$ et $-2/7$. Des vecteurs propres correspondants sont $(2,1)$ et $(-3,1)$. Ainsi :

$$P = [[2,-3],[1,1]], P^{-1} = (1/5)[[1,3],[-1,2]] \text{ et } M = P \operatorname{diag}(3/7, -2/7) P^{-1}.$$

Le vecteur initial est $(x_2, y_2) = (6/49, 7/49)$. Ses coordonnées dans cette base propre sont $27/245$ et $8/245$. Pour $n \geq 2$:

$$x_n = (54/245)(3/7)^{(n-2)} - (24/245)(-2/7)^{(n-2)}.$$

En multipliant par $p = 6/7$ et en absorbant un facteur de chaque racine, on retrouve exactement la formule de Q3.

Exercice 3 — Composition de projecteurs orthogonaux

Q1. Projecteur p dans $\mathbb{R}^4$

Pour $u = (x,y,z,t)$, $p(u) = ((x-z)/2, (y-t)/2, (z-x)/2, (t-y)/2)$. Une seconde application laisse ce vecteur inchangé, donc $p^2 = p$.

Les espaces caractéristiques sont :

- $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$, espace propre de valeur 1 ;
- $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$, espace propre de valeur 0.

Ces deux plans sont orthogonaux. p est donc le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} p$. On peut aussi constater que sa matrice est symétrique et idempotente.

Q2. Hyperplan H et projecteur q

H est le noyau de la forme linéaire $(x,y,z,t) \mapsto y-t$: c'est un sous-espace. Une base est $(e_1, e_3, e_2 + e_4)$. Son orthogonal est $H^\perp = \operatorname{Vect}(e_2 - e_4)$.

La projection sur H conserve x et z et remplace y et t par leur moyenne : $q(x,y,z,t) = (x, (y+t)/2, z, (y+t)/2)$. Sa matrice est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Q3. Composée $p \circ q$

On calcule $p(q(u)) = ((x-z)/2, 0, (z-x)/2, 0)$. C'est la **projection orthogonale sur $\text{Vect}(e_1 - e_3)$** . Son image est cette droite et son noyau est l'hyperplan $x = z$, de base $(e_1 + e_3, e_2, e_4)$.

Dans cet exemple, $\text{Im}(pq) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$ et $\text{Ker}(pq) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$. En effet, $\text{Im } q = H$ annule la composante $e_2 - e_4$ de $\text{Im } p$; et les générateurs $e_1 + e_3$, $e_2 + e_4$ et $e_2 - e_4$ engendrent précisément le noyau décrit ci-dessus.

Q4. Propriétés d'un projecteur

a) Si v appartient à $\text{Im } p$, il s'écrit $p(u)$, donc $p(v) = p^2(u) = p(u) = v$. Réciproquement, $p(v) = v$ implique $v = p(v) \in \text{Im } p$. Ainsi $\text{Im } p = \{v : p(v) = v\}$.

Pour tout u , $p(u - p(u)) = 0$, donc $u - p(u)$ appartient à $\text{Ker } p$. Réciproquement, si $v \in \text{Ker } p$, $v = v - p(v)$. Ainsi $\text{Ker } p = \{u - p(u) : u \in E\}$.

b) Si p est orthogonal, $u = p(u) + (u - p(u))$ est une décomposition orthogonale. Pythagore donne $\|u\|^2 = \|p(u)\|^2 + \|u - p(u)\|^2$. Donc $\|p(u)\| \leq \|u\|$, avec égalité exactement si $u = p(u)$, c'est-à-dire $u \in \text{Im } p$.

Q5. Lorsque pq est un projecteur

a) Soit $u \in \text{Im}(pq)$. Puisque pq est idempotent, $pq(u) = u$. Il en résulte $u \in \text{Im } p$ et $p(u) = u$. Dès lors $p(q(u) - u) = pq(u) - p(u) = 0$: $q(u) - u$ appartient à $\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$.

Comme $u \in \text{Im } p$, on a $\|q(u)\|^2 = \|u\|^2 + \|q(u) - u\|^2$. Mais q est une projection orthogonale, donc $\|q(u)\| \leq \|u\|$. Les deux relations imposent $q(u) = u$.

b) Tout $u \in \text{Im}(pq)$ appartient ainsi à $\text{Im } p$ et $\text{Im } q$. Réciproquement, si u appartient à ces deux images, $p(u) = q(u) = u$, donc $pq(u) = u$ et $u \in \text{Im}(pq)$. On obtient $\text{Im}(pq) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Q6. Lorsque p et q commutent

a) Si $v \in \text{Ker } q$, $pq(v) = 0$. Si $v \in \text{Ker } p$, la commutation donne $pq(v) = qp(v) = 0$. Ainsi $\text{Ker } p + \text{Ker } q$ est inclus dans $\text{Ker}(pq)$.

Réciproquement, si $pq(v) = 0$, écrivons $v = (v - q(v)) + q(v)$. Le premier terme appartient à $\text{Ker } q$; le second appartient à $\text{Ker } p$ puisque $p(q(v)) = 0$. D'où $\text{Ker}(pq) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

b) La commutation donne $(pq)^2 = p^2q^2 = pq$: la composée est un projecteur. Q5 identifie son image à $\text{Im } p \cap \text{Im } q$. En outre, p et q sont autoadjoints et $(pq)^* = qp = pq$, donc ce projecteur est orthogonal. **pq est la projection orthogonale sur $\text{Im } p \cap \text{Im } q$.**