

ITPE 2023 : corrigé de mathématiques

Proposition de corrigé - non officielle. Concours interne d'ingénieur des travaux publics de l'État, session 2023, épreuve de mathématiques.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Exercice 1 - Suites et calcul matriciel

Partie I.1 et I.2 : la récurrence vectorielle

La première ligne de AX_n vaut $3u_{n+1} - 2u_n = u_{n+3}$; les suivantes valent u_{n+2} et u_{n+1} . Ainsi $X_{n+1} = AX_n$. Une récurrence, initialisée par $X_0 = A^0 X_0$, donne $X_n = A^n X_0$.

I.3.a : puissances de T

Pour $T = I_3 + B$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Le bloc supérieur est nilpotent d'ordre deux. Pour $n \geq 2$, B^n ne possède donc que l'entrée (3,3), égale à $(-3)^n$. Le binôme, puisque I_3 commute avec B, ou une récurrence directe donne, pour tout $n \geq 0$:

$$T^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix}$$

I.3.b et I.3.c : changement de base

On trouve $\det(P) = -9$, donc P est inversible, avec :

$$P^{-1} = (1/9) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La multiplication donne $PTP^{-1} = A$, d'où $A^n = PT^n P^{-1}$. En posant $q = (-2)^n$:

$$A^n = (1/9) \begin{bmatrix} 3n+5+4q & 3n+8-8q & -6n-4+4q \\ 3n+2-2q & 3n+5+4q & 2-6n-2q \\ 3n-1+q & 3n+2-2q & 8-6n+q \end{bmatrix}$$

À $n = 0$, cette expression redonne I_3 , ce qui vérifie notamment les signes.

I.4 : retrouver u_n

Multiplier A^n par $X_0 = (u_2, u_1, u_0)^T$, puis prendre la troisième coordonnée. On obtient une combinaison explicite des trois données initiales.

Partie II.1 et II.2 : espaces E et F

E contient la suite nulle. Une combinaison linéaire de deux suites satisfaisant la récurrence la satisfait encore, par linéarité : E est un sous-espace de l'espace des suites réelles.

Une suite de F s'écrit $u_n = u_0(-2)^n$. Donc $F = \text{Vect}((-2)^n)$, de dimension un ; cette suite non nulle constitue une base.

II.3 et II.4 : somme directe et inclusions

Si une suite de F appartient aussi à G, sa différence seconde est $9u_0(-2)^n$; elle doit être nulle, donc $u_0 = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$ et la somme est directe.

Pour F, le polynôme de récurrence s'annule en -2 : $(-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$. Pour G, $u_n = an + b$: la substitution dans $u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n$ donne zéro. Les deux espaces sont inclus dans E.

II.5 : décomposition d'une suite de E

Avec $v_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$, la récurrence de u donne $v_{n+1} = -2v_n$; donc v appartient à F.

On remarque $w_n = 9u_n - v_n$. Sa différence seconde est $9v_n - (v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n)$. Puisque $v_{n+1} = -2v_n$, le second terme vaut $9v_n$: la différence est nulle. Donc w appartient à G.

Enfin $v_n + w_n = 9u_n$, donc $u = v/9 + w/9$ appartient à F + G. On a ainsi $E \subset F + G$, et l'inclusion réciproque a déjà été démontrée.

II.6 : base et formule finale

$E = F \oplus G$, de dimension trois. Une base adaptée est formée des suites $(-2)^n$, n et 1. Écrivons $u_n = a + bn + c(-2)^n$. Les trois conditions initiales donnent :

$$c = (u_2 - 2u_1 + u_0)/9 ; b = (u_2 + u_1 - 2u_0)/3 ; a = (-u_2 + 2u_1 + 8u_0)/9.$$

Cette expression coïncide avec la troisième ligne de $A^n X_0$.

Exercice 2 - Intégrales et somme des inverses des carrés

Les intégrales sont prises sur $[0, \pi/2]$.

1 à 3. Intégrales I_n

$J_0 = \pi^3/24$, par intégration de x^2 ; $I_0 = \pi/2$; $I_1 = \pi/4$, en utilisant $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.

Pour $n \geq 1$, intégrer par parties $I_n = \int \cos^{2n-1} x \cdot \cos x \, dx$, avec une primitive $\sin x$ du second facteur. Le terme de bord est nul. Il vient $I_n = (2n - 1) \int \sin^2 x \cos^{2n-2} x \, dx = (2n - 1)(I_{n-1} - I_n)$. Ainsi :

$$I_n = (2n - 1)I_{n-1}/(2n), \text{ puis, en multipliant les rapports, } I_n = [(2n)!/(4^n(n!)^2)] \times \pi/2.$$

4. Relation entre I_n et J_n

Poser $h(x) = \sin x \cos^{2n-1} x$. Alors $h'(x) = 2n \cos^{2n} x - (2n - 1) \cos^{2n-2} x$. Une intégration par parties donne :

$$2nJ_n - (2n - 1)J_{n-1} = \int x^2 h'(x) \, dx = -2 \int x \sin x \cos^{2n-1} x \, dx.$$

Or $\sin x \cos^{2n-1} x = -(\cos^{2n} x)' / (2n)$. Une deuxième intégration par parties, dont le terme $x \cos^{2n} x$ est nul aux bornes, donne $\int x \sin x \cos^{2n-1} x \, dx = I_n / (2n)$. Donc $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

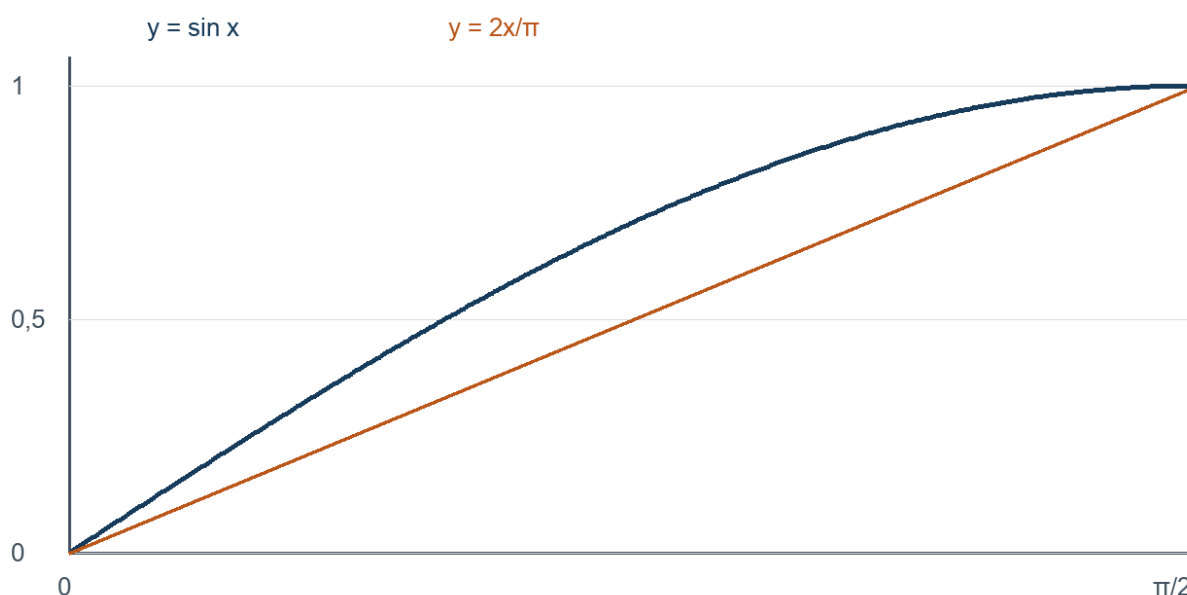
5 et 6. Télescopage

Poser $K_n = [4^n(n!)^2 / (2n)!] J_n$. La relation précédente et la valeur de I_n donnent $K_{n-1} - K_n = \pi / (4n^2)$. La somme de $k = 1$ à n vaut donc :

$$K_n = J_0 - (\pi/4) \sum_{k=1}^n 1/k^2.$$

7.a. Une inégalité géométrique

$f(x) = (\pi/2)\sin x - x$ est deux fois dérivable ; $f'(x) = (\pi/2)\cos x - 1$ et $f''(x) = -(\pi/2)\sin x$. f' est strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$, positive en zéro et négative en $\pi/2$; elle s'annule une seule fois. Comme $f(0) = f(\pi/2) = 0$, f augmente puis diminue en restant non négative. Ainsi $x \leq (\pi/2)\sin x$.



Sur $[0, \pi/2]$, la courbe $y = \sin x$ reste au-dessus de sa corde $y = 2x/\pi$.

7.b et 7.c. Encadrement

En élevant l'inégalité au carré puis en multipliant par $\cos^{2n} x \geq 0$:

$$0 \leq J_n \leq (\pi^2/4) \int \sin^2 x \cos^{2n} x \, dx.$$

Cette dernière intégrale vaut $I_n - I_{n+1} = I_n / [2(n+1)]$. En remplaçant I_n par sa formule, on obtient $0 \leq K_n \leq \pi^3 / [16(n+1)]$.

7.d et 8. Limites

Le théorème d'encadrement donne $K_n \rightarrow 0$. La formule télescopique implique donc que les sommes $\sum_{k=1}^n 1/k^2$ convergent vers $(4/\pi)J_0$, soit $\pi^2/6$. La valeur est déduite des intégrales, et non admise au départ.

Exercice 3 - Tirages et remise à zéro du gain

1. Version à deux jetons

Chaque tirage produit un gain de un euro avec probabilité $1/2$ et zéro sinon. Par indépendance, X_n suit la loi binomiale $B(n, 1/2)$: $P(X_n = k) = C(n, k)/2^n$, $E(X_n) = n/2$ et $\text{Var}(X_n) = n/4$.

2 et 3. Loïs pour un, deux et trois tirages

Avec trois jetons, A ajoute un euro, B conserve le gain et C le remet à zéro. Chaque lettre a probabilité $1/3$.

Nombre de tirages	Probabilités pour les gains 0, 1, 2, 3
1	$2/3$; $1/3$
2	$5/9$; $3/9$; $1/9$
3	$14/27$; $8/27$; $4/27$; $1/27$

Pour le troisième tirage, l'événement de gain zéro est C_3 ou $(B_3 \text{ et } X_2 = 0)$. Pour $k \geq 1$, il est $(B_3 \text{ et } X_2 = k)$ ou $(A_3 \text{ et } X_2 = k - 1)$. Ces alternatives sont disjointes, et le troisième tirage est indépendant de X_2 : elles donnent toutes les entrées du tableau.

4 à 6. Gain maximal et probabilité de gain nul

Pour avoir $X_n = n$, il faut n lettres A : $P(X_n = n) = 3^{-n}$.

Le même découpage donne $p_{n+1} = p_n/3 + 1/3$, où $p_n = P(X_n = 0)$. Le point fixe est $\ell = 1/2$. Avec $X_0 = 0$, $p_0 = 1$; alors $p_n - 1/2 = (p_0 - 1/2)3^{-n}$. Donc $p_n = 1/2 + 1/(2 \times 3^n)$.

7 et 8. Récurrence générale et X_4

Pour $k \geq 1$, C ne peut pas produire k . On a donc $P(X_{n+1} = k) = [P(X_n = k) + P(X_n = k - 1)]/3$, avec une probabilité nulle hors des valeurs possibles.

k	0	1	2	3	4
$P(X_4 = k)$	$41/81$	$22/81$	$12/81$	$5/81$	$1/81$

La somme des numérateurs vaut 81.

9 et 10. Espérance

Multiplier la récurrence par k et sommer : le terme provenant de B donne $E(X_n)/3$; celui provenant de A donne $[E(X_n) + 1]/3$. Ainsi $E(X_{n+1}) = (2/3)E(X_n) + 1/3$.

Le point fixe vaut un. Avec $E(X_0) = 0$, la suite $E(X_n) - 1$ est géométrique de raison $2/3$. Donc $E(X_n) = 1 - (2/3)^n$. Le gain moyen tend vers un euro malgré le nombre croissant de tirages, car C efface tout le gain accumulé.