

Corrigé ITPE 2026 : mathématiques

Proposition de corrigé — non officielle. Concours interne ITPE, session 2026, composition de mathématiques, quatre heures, coefficient 4. Les trois exercices et les 35 questions sont traités. Les incohérences de l'énoncé sont signalées et les hypothèses nécessaires précisées.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Exercice 1 — Évolution des actifs

On note $q = 1 - p$. Pour obtenir les lois binomiales et additionner les variances des accroissements, on suppose que les accroissements sont indépendants d'une période à l'autre. Cette hypothèse, nécessaire aux questions 5, 6, 9 et 11, n'est pas explicitement formulée dans le sujet. La seule connaissance de leurs lois individuelles ne suffit pas.

1. Loi, espérance et variance de U_t

Si $Z_t = 1$, alors $U_t = 1$; si $Z_t = -1$, alors $U_t = 0$. Ainsi, U_t suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

$P(U_t = 1) = p$, $P(U_t = 0) = q$, $E(U_t) = p$ et $\text{Var}(U_t) = pq$.

2. Une égalité erronée dans l'énoncé

La valeur de l'actif additionne les variations de valeur, et non le nombre de hausses. Comme $S_0 = 0$ et $S_k - S_{k-1} = Z_k$, la bonne égalité est :

$$S_t = Z_1 + \dots + Z_t.$$

L'égalité proposée avec les U_k est fautive : à la première période, en cas de baisse, $S_1 = -1$ alors que $U_1 = 0$.

3. Expression avec les U_k

Puisque $Z_k = 2U_k - 1$, on obtient :

$$S_t = 2(U_1 + \dots + U_t) - t.$$

Si N_t est le nombre de hausses en t périodes, cette relation s'écrit $S_t = 2N_t - t$: les N_t hausses apportent N_t , et les $t - N_t$ baisses retirent $t - N_t$.

4. Nombre impair de périodes

S_t a la même parité que t . Il ne peut donc pas être nul si t est impair : $P(S_t = 0) = 0$.

5. Nombre pair de périodes

Sous l'hypothèse d'indépendance dans le temps, N_t suit la loi binomiale de paramètres t et p . Pour revenir à zéro, il faut autant de hausses que de baisses, donc $N_t = t/2$. Pour t pair :

$$P(S_t = 0) = C(t, t/2) p^{t/2} q^{t/2}.$$

$C(t, t/2)$ compte les choix des périodes de hausse ; chacun a la probabilité $p^{t/2}q^{t/2}$. Pour $t = 0$, la probabilité vaut 1.

6. Limite de u_{2t}

La formule précédente donne $u_{2t} = C(2t, t)(pq)^t$. La formule de Stirling entraîne :

$C(2t, t) \sim 4^t / \sqrt{(\pi t)}$, donc $u_{2t} \sim (4pq)^t / \sqrt{(\pi t)}$.

Or $4p(1 - p) \leq 1$, avec égalité seulement pour $p = 1/2$. Si $p = 1/2$, l'équivalent est $1/\sqrt{(\pi t)}$; sinon, son numérateur décroît géométriquement. **Dans tous les cas, u_{2t} tend vers zéro.**

7. Loi de $Z_t + W_t$

Z_t et W_t sont indépendantes. Les quatre valeurs sont distinctes puisque $0 < r < 1$.

Valeur	Probabilité
$1 + r$	pq
$1 - r$	p^2
$-1 + r$	q^2
$-1 - r$	pq

On a $E(Z_t) = 2p - 1$ et $E(W_t) = r(q - p)$. Par conséquent :

$$E(Z_t + W_t) = (1 - r)(2p - 1).$$

L'indépendance permet d'additionner les variances : $\text{Var}(Z_t) = 4pq$ et $\text{Var}(W_t) = 4r^2pq$. Ainsi :

$$\text{Var}(Z_t + W_t) = 4pq(1 + r^2).$$

8. Valeur cumulée des deux actifs

Comme les deux valeurs initiales sont nulles :

$$S_t + C_t = \sum_{k=1}^t (Z_k + W_k).$$

9. Comparaison des variances

Avec des accroissements indépendants dans le temps et les deux actifs indépendants :

$$\text{Var}(S_t) = 4tpq \text{ et } \text{Var}(S_t + C_t) = 4tpq(1 + r^2).$$

La seconde variance est strictement supérieure pour $t > 0$; elles sont toutes deux nulles pour $t = 0$. Ajouter cet actif indépendant augmente ici la variance de la somme : on n'a pas réduit le poids du premier actif pour former un portefeuille de poids total constant.

10. Actif dépendant : loi de $Z_t + \xi_t$

Puisque $\xi_t = -rZ_t$, la somme vaut $(1 - r)Z_t$. Elle prend donc la valeur $1 - r$ avec probabilité p , et $-(1 - r)$ avec probabilité q .

$$E(Z_t + \xi_t) = (1 - r)(2p - 1) \text{ et } \text{Var}(Z_t + \xi_t) = 4pq(1 - r)^2.$$

11. Comparaison avec l'actif indépendant

On a $K_t = -rS_t$ et $S_t + K_t = (1 - r)S_t$. D'où :

$$\text{Var}(K_t) = 4tr^2pq \text{ et } \text{Var}(S_t + K_t) = 4tpq(1 - r)^2.$$

La différence $\text{Var}(S_t + C_t) - \text{Var}(S_t + K_t)$ vaut $8trpq$, positive pour $t > 0$. La dépendance négative parfaite compense une partie des variations de A ; l'indépendance de B ne produit pas cette compensation.

Exercice 2 — Endomorphismes nilpotents

Deux coquilles sont à corriger : f^p désigne une composition de f avec lui-même, et l'application φ définie avec quatre coordonnées agit sur K^4 , pas sur K^3 . Les questions 25 à 27 nécessitent aussi une hypothèse supplémentaire, indiquée ci-dessous.

12. Linéarité de φ

Pour $v = (x, y, z, t)$, on a $\varphi(v) = (0, x, y, z)$. L'image appartient à K^4 et chaque coordonnée est une combinaison linéaire des coordonnées de v . Pour tous v, w et tous scalaires α, β : $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w)$. C'est donc un endomorphisme de K^4 .

13. Matrice dans la base canonique

On a $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_3$, $\varphi(e_3) = e_4$ et $\varphi(e_4) = 0$. Les colonnes de la matrice sont ces images :

Ligne	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0

14. Noyau et image

$\varphi(x, y, z, t) = 0$ équivaut à $x = y = z = 0$. Ainsi $\ker \varphi = \text{Vect}(e_4)$, de base e_4 .

Les images sont exactement les vecteurs de première coordonnée nulle : $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$, de base (e_2, e_3, e_4) .

15. Indice de nilpotence

Les itérées sont $\varphi^2(x, y, z, t) = (0, 0, x, y)$, puis $\varphi^3(x, y, z, t) = (0, 0, 0, x)$ et $\varphi^4(x, y, z, t) = 0$. φ^4 est nulle, mais φ^3 ne l'est pas puisque $\varphi^3(e_1) = e_4$. L'indice est donc 4.

16. Choix de a

On peut prendre $a = e_1$. Plus généralement, tout vecteur dont la première coordonnée est non nulle convient.

17. Une base de K^4

Si $a = (x, y, z, t)$ avec $x \neq 0$, la matrice des quatre vecteurs $(a, \varphi(a), \varphi^2(a), \varphi^3(a))$ est triangulaire inférieure, avec quatre coefficients diagonaux égaux à x . Son déterminant est $x^4 \neq 0$: les vecteurs constituent une base. Pour $a = e_1$, il s'agit simplement de la base canonique.

18. Linéarité de Δ

La substitution $X \mapsto X + 1$ et la soustraction sont linéaires. Ainsi $\Delta(\alpha P + \beta Q) = \alpha \Delta(P) + \beta \Delta(Q)$. Si P est de degré au plus 2, $P(X + 1) - P(X)$ l'est aussi. Δ est donc un endomorphisme de $K_2[X]$.

19. Degré de $\Delta(P)$

Si P est de degré $m \geq 1$, de coefficient dominant c_m , le terme en X^m s'annule et le terme dominant restant est $mc_m X^{m-1}$, par la formule du binôme. Sur R ou C , $mc_m \neq 0$. **Le degré diminue exactement de 1.**

Pour un polynôme constant, $\Delta(P) = 0$; le polynôme nul n'a pas de degré usuel.

20. Noyau et image de Δ

Pour $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, le calcul donne $\Delta(P) = 2\alpha X + \alpha + \beta$. Cette expression est nulle si et seulement si $\alpha = \beta = 0$. Ainsi $\ker \Delta = K_0[X] = \text{Vect}(1)$.

Tout polynôme affine $uX + v$ s'obtient en prenant $\alpha = u/2$ et $\beta = v - u/2$. Donc $\text{Im } \Delta = K_1[X] = \text{Vect}(1, X)$.

21. Indice de nilpotence de Δ

Après trois différences, tout polynôme de degré au plus 2 devient nul. Cependant, $\Delta(X^2) = 2X + 1$ et $\Delta^2(X^2) = 2 \neq 0$. L'indice est donc **3**.

22. Existence d'un vecteur a

Par définition de l'indice minimal p , f^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul. Il existe donc a tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$. Pour $p = 1$, f est nul et tout a non nul convient, puisque f^0 est l'identité.

23. Liberté de la chaîne

Supposons $c_0 a + c_1 f(a) + \dots + c_{p-1} f^{p-1}(a) = 0$. Si un coefficient est non nul, soit j le plus petit indice correspondant. Appliquons f^{p-1-j} à l'égalité. Les termes d'indices inférieurs à j ont un coefficient nul ; ceux d'indices supérieurs contiennent une puissance de f au moins égale à p et s'annulent. Il reste $c_j f^{p-1}(a) = 0$, contradiction. **La famille est libre.**

24. Peut-on avoir $p > n$?

Non. Une famille libre de p vecteurs dans un espace de dimension n vérifie **$p \leq n$** .

25. Une affirmation fausse sans $p = n$

Une famille libre de p vecteurs n'est une base de E que si $p = n$. Cette égalité manque dans l'énoncé. Par exemple, pour l'endomorphisme nul de K^2 , $p = 1$ et la famille (a) ne peut pas engendrer K^2 .

En ajoutant l'hypothèse $p = n$, la famille libre précédente possède n vecteurs et constitue une base de E . C'est sous cette hypothèse que les deux réponses suivantes décrivent le cas d'une seule chaîne nilpotente.

26. Matrice d'un endomorphisme qui commute avec f

La lettre u n'est pas définie dans la question ; on interprète la demande comme portant sur h . Supposons $p = n$ et écrivons :

$$h(a) = c_0 a + c_1 f(a) + \dots + c_{n-1} f^{n-1}(a).$$

Puisque $hf = fh$, on a $h(f^k(a)) = f^k(h(a))$. Dans la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$, la première colonne est donc $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$, la deuxième $(0, c_0, \dots, c_{n-2})$, et ainsi de suite. La matrice est **triangulaire inférieure, constante sur chaque sous-diagonale**. Pour $n = 4$:

Ligne	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
1	c_0	0	0	0
2	c_1	c_0	0	0
3	c_2	c_1	c_0	0
4	c_3	c_2	c_1	c_0

27. Dimension du commutant

Sous l'hypothèse $p = n$, la réponse précédente donne $h = c_0 \text{id} + c_1 f + \dots + c_{n-1} f^{n-1}$. Réciproquement, chaque polynôme en f commute avec f . Ces n endomorphismes sont libres : appliquer une relation linéaire à a ramène à la famille libre de la question 23. Ainsi $\dim C(f) = n$.

Sans $p = n$, cette conclusion est fautive et la dimension dépend de la décomposition en chaînes. Si $f = 0$ sur K^n , tous les endomorphismes commutent avec f : **la dimension est n^2** . Plus généralement, pour des blocs nilpotents de tailles $\ell_1, \dots, \ell_k$, elle vaut $\sum_i \sum_j \min(\ell_i, \ell_j)$. Un bloc d'application entre deux chaînes est déterminé par l'image d'un générateur, soumise à l'annulation de sa puissance : cela laisse $\min(\ell_i, \ell_j)$ paramètres. Par exemple, en dimension 4 avec indice 2, les tailles $(2, 2)$ donnent 8, tandis que $(2, 1, 1)$ donnent 10. Les seuls nombres n et p ne déterminent donc pas la réponse.

Exercice 3 — Équation logistique

28. Dérivée de y

Puisque $y = 1/z$ et z ne s'annule pas : $y' = -z'/z^2$.

29. Équation vérifiée par z

En remplaçant y dans $y' = ry(1 - y/K)$, on obtient $-z'/z^2 = r/z - r/(Kz^2)$. Multiplier par z^2 donne :

$$z' = -rz + r/K = -r(z - 1/K).$$

30. Équation homogène

L'équation $z' = -rz$ a pour solutions $z_h(t) = \lambda e^{(-rt)}$, avec λ réel.

31. Solution générale de l'équation affine

La constante $z_p = 1/K$ vérifie l'équation. Ajouter les solutions homogènes donne $z(t) = \lambda e^{(-rt)} + 1/K$.

32. Expression de y

À $t = 0$, $\lambda = 1/y_0 - 1/K$. En inversant, on obtient :

$$y(t) = K / [1 + (K/y_0 - 1)e^{(-rt)}].$$

Cette expression définit la solution tant que son dénominateur ne s'annule pas. Pour $y_0 > 0$, il reste positif sur tout $[0, +\infty[$.

33. Variations et limite : attention au cas négatif

Si $0 < y_0 < K$, y reste entre 0 et K ; l'équation donne $y' > 0$. La solution croît et tend vers K .

Si $y_0 = K$, y est constamment égale à K .

Si $y_0 > K$, y reste supérieure à K , avec $y' < 0$. Elle décroît vers K .

Pour $y_0 < 0$, le dénominateur s'annule à l'instant positif $t^\star = \ln(1 - K/y_0)/r$. Sur $[0, t^\star[$, y est négative et décroissante, puis tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $t^\star$ par valeurs inférieures. Il n'existe donc **aucune solution avec cette donnée initiale sur tout $\mathbb{R}^+$** , contrairement à l'hypothèse du début du problème. On ne peut pas lui attribuer une limite en $+\infty$. La branche de la formule située après le pôle ne prolonge pas la solution à travers ce pôle.

34. Capacité de support

Pour une population positive, K est l'équilibre stable du modèle : au-dessous, la population augmente ; au-dessus, elle diminue. Le facteur $1 - y/K$ traduit la limitation de la croissance par les ressources et la concurrence. r est le taux de croissance lorsque la population est petite devant K . La solution nulle, exclue par le changement de variable, existe également.

Le mot « capacité » désigne donc la taille d'équilibre soutenable **dans ce modèle à paramètres constants** ; il ne suppose pas que le milieu réel aurait toujours une capacité fixe, indépendante des saisons ou des autres espèces.

35. Équivalent et convergence de la série

Pour $y_0 > 0$, posons $A = K/y_0 - 1$. Alors :

$$y(t) - K = -KAe^{(-rt)} / [1 + Ae^{(-rt)}].$$

Si $y_0 \neq K$, le dénominateur tend vers 1 et :

$$y(t) - K \sim [K(y_0 - K)/y_0]e^{(-rt)}.$$

La série de terme général $u_n = y(n) - K$ est **absolument convergente**, par comparaison avec la série géométrique de raison e^{-r} , comprise entre 0 et 1. Si $y_0 = K$, tous ses termes sont nuls. Pour $y_0 < 0$, l'hypothèse d'une solution définie sur tout $\mathbb{R}^+$ échoue : la question de cette série n'est pas applicable à la solution initiale considérée.