

Corrigé Mines-Ponts 2026 MP — Mathématiques II

Proposition de corrigé — non officielle. Concours commun Mines-Ponts 2026, filière MP, deuxième épreuve de mathématiques, quatre heures sans calculatrice. Les 30 questions des quatre pages de texte, après la couverture, sont traitées.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

I. Quelques propriétés du groupe orthogonal

1. Diagonalisabilité de R_θ

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2 \cos \theta X + 1$, dont les racines complexes sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Si $\sin \theta \neq 0$, elles sont distinctes et non réelles : R_θ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$. Si $\sin \theta = 0$, $R_\theta = I_2$ ou $-I_2$: elle est déjà diagonale sur les deux corps. Elle est donc toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et l'est sur $\mathbb{R}$ exactement lorsque θ est un multiple de π .

2. Description de $SO_2(\mathbb{R})$

Soit M dans $SO_2(\mathbb{R})$. Sa première colonne est un vecteur unitaire (a, c) , donc $(\cos \theta, \sin \theta)$ pour un réel θ . La seconde colonne, unitaire et orthogonale à la première, est soit $(-\sin \theta, \cos \theta)$, soit son opposé. Le déterminant vaut respectivement 1 ou -1 : seule la première possibilité convient. Donc $M = R_\theta$. Réciproquement, les colonnes de R_θ sont orthonormées et son déterminant vaut 1, ce qui établit l'égalité des ensembles.

3. Compacité et absence de connexité par arcs

$O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des zéros de l'application continue $M \mapsto M^T M - I_n$; il est fermé. Ses colonnes unitaires imposent $|m_{ij}| \leq 1$, donc il est borné. En dimension finie, il est compact.

Le déterminant ne prend que les valeurs 1 et -1 sur cet ensemble. Un chemin continu entre I_n et $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ aurait un déterminant continu reliant ces deux valeurs sans quitter $\{-1, 1\}$, ce qui est impossible. $O_n(\mathbb{R})$ n'est donc pas connexe par arcs.

4. Connexité par arcs de $SO_n(\mathbb{R})$

La réduction orthogonale réelle d'une matrice orthogonale fournit une base orthonormée dans laquelle elle est diagonale par blocs de rotations planes et de blocs scalaires 1 ou -1 . Le déterminant 1 impose un nombre pair de blocs -1 ; on les regroupe deux à deux en rotations R_π .

Ainsi $M = P \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r}, 1, \dots, 1)P^T$, avec P orthogonale. L'application $t \mapsto P \text{diag}(R_{t\theta_1}, \dots, R_{t\theta_r}, 1, \dots, 1)P^T$, pour $0 \leq t \leq 1$, est un chemin dans $SO_n(\mathbb{R})$, de I_n à M . Dans le cas $n = 2$, cette construction est directement celle de la question 2.

5. Sous-groupes contenant $SO_n(\mathbb{R})$

Si H ne contient que des matrices de déterminant 1, il est égal à $SO_n(\mathbb{R})$. Sinon, choisir A dans H de déterminant -1 . Pour toute matrice B orthogonale de déterminant -1 , $A^{-1}B$ appartient à $SO_n(\mathbb{R})$, donc à H , et $B = A(A^{-1}B)$ appartient à H . H contient alors les deux classes de déterminant et $H = O_n(\mathbb{R})$.

6. Matrices aléatoires de Bernoulli

Pour une matrice 2×2 , noter a, b, c, d les quatre coefficients. Elle est inversible si $ad \neq bc$, c'est-à-dire si exactement l'un de ces deux produits vaut 1. Les produits sont indépendants et chacun vaut 1 avec probabilité p^2 . D'où :

$$P(Z_2 \text{ inversible}) = 2p^2(1 - p^2).$$

Une colonne à coefficients 0 ou 1 est unitaire seulement lorsqu'elle comporte exactement un 1. L'orthogonalité des colonnes impose que leurs 1 occupent des lignes distinctes : les matrices possibles sont exactement les $n!$ matrices de permutation. Chacune a n coefficients égaux à 1 et $n^2 - n$ coefficients égaux à 0. Ainsi :

$$P(Z_n \in O_n(\mathbb{R})) = n! p^n (1 - p)^{n^2 - n}.$$

Pour $n \geq 2$, la moitié des permutations sont paires, par appariement avec une transposition. Par conséquent :

$$P(Z_n \in SO_n(\mathbb{R})) = (n!/2) p^n (1 - p)^{n^2 - n}.$$

7. Réflexion envoyant x sur y

Si $x \neq y$, poser $v = x - y$ et $A = I_n - 2vv^T/\|v\|^2$. C'est la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à v . L'égalité des normes donne $v \cdot x = \|v\|^2/2$, donc $Ax = x - v = y$.

Si $x = y$, choisir un vecteur v non nul orthogonal à x , ce qui est possible pour $n \geq 2$; si $x = 0$, tout v non nul convient. La même réflexion fixe alors x et satisfait encore $Ax = y$. L'identité seule ne conviendrait pas comme réponse à la demande d'une réflexion.

8. Construction dans le groupe compact

Poser $c = \|Gx\| > 0$. La question 7 fournit A orthogonale telle que $AGx = cx$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est inclus dans le groupe considéré, $T = AG$ appartient à ce groupe et $Tx = cx$. Pour tout entier p , positif, nul ou négatif, $G_p = T^p$ appartient au groupe et vérifie $G_p x = c^p x$. Pour les puissances négatives, on utilise $T^{-1}x = c^{-1}x$.

9. Maximalité du groupe orthogonal parmi ces groupes compacts

Le groupe compact est borné pour la norme d'opérateur. Si $c > 1$, $\|T^p x\|$ devient non borné lorsque p tend vers $+\infty$; si $c < 1$, il devient non borné lorsque p tend vers $-\infty$. Donc $c = 1$.

Ainsi chaque G du groupe préserve la norme de tout vecteur unitaire, puis de tout vecteur par homogénéité. Par polarisation, G préserve le produit scalaire et appartient à $O_n(\mathbb{R})$. L'inclusion inverse étant donnée, **le groupe est exactement $O_n(\mathbb{R})$** .

II. Calcul différentiel

10. Différentielle de $M \mapsto M^T M$

Le développement $(M + H)^T(M + H) = M^T M + M^T H + H^T M + H^T H$ montre que :

$$df(M)[H] = M^T H + H^T M.$$

Le reste est quadratique en H et la différentielle dépend continûment de M ; f est de classe C^1 , et même polynomiale.

11. Inclusion dans les matrices antisymétriques

Pour un chemin γ du sujet, $\gamma(t)^T \gamma(t) = I_n$. Dériver en 0, où $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$, donne $H^T + H = 0$. Tout élément de T est donc antisymétrique.

12. Structure vectorielle de T

Si γ_1 et γ_2 représentent H_1 et H_2 , leur produit $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$ reste orthogonal et a pour dérivée $H_1 + H_2$ en 0. Le chemin constant représente 0. Pour un scalaire a , $t \mapsto \gamma_1(at)$, défini sur un voisinage adapté de 0, représente aH_1 ; le cas $a = 0$ est constant. T est donc stable par addition et multiplication scalaire : c'est un sous-espace vectoriel.

13. Détermination exacte de T

Pour H antisymétrique, prendre $\gamma(t) = \exp(tH)$. On a $\gamma(t)^T \gamma(t) = \exp(-tH)\exp(tH) = I_n$, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$. Toute matrice antisymétrique appartient ainsi à T . Avec la question 11 : $T = \{H : H^T = -H\}$.

14. Absence de maximum global sur $SL_n(\mathbb{R})$

Pour $t > 0$, la matrice $D_t = \text{diag}(t, t^{-1}, 1, \dots, 1)$ a un déterminant égal à 1. Mais $g(D_t) = t^2 + t^{-2} + n - 2 \rightarrow +\infty$ lorsque t tend vers l'infini. g n'est pas majorée sur $SL_n(\mathbb{R})$, donc n'y possède aucun maximum global.

15. Gradients

Avec le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$, on a $g(M) = \sum m_{ij}^2$, d'où $\nabla g(M) = 2M$.

Le déterminant est un polynôme des coefficients, donc de classe C^1 . Son développement suivant la ligne i donne $\partial \det / \partial m_{ij} = C_{ij}$, le cofacteur correspondant. Ainsi $\nabla \det(M) = \text{Com}(M)$, sans transposer cette matrice de cofacteurs. Pour M inversible, $\text{Com}(M) = \det(M)M^{-T}$.

16. Extremum local

Sur $SL_n(\mathbb{R})$, $\text{Com}(M) = M^{-T}$ est non nulle ; la contrainte est régulière. Au point d'extremum local, les multiplicateurs de Lagrange donnent $2M = \mu \text{Com}(M)$. En posant $\lambda = \mu/2$: $M = \lambda \text{Com}(M)$.

Multiplier à gauche par M^T donne $M^T M = \lambda I_n$. Cette matrice est définie positive, donc $\lambda > 0$. Son déterminant vaut $(\det M)^2 = 1$, mais aussi λ^n : $\lambda = 1$. Ainsi $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

17. Minimum global

$SL_n(\mathbb{R})$ est fermé et non vide. La partie où $g(M) \leq n$ est compacte, puisque g est le carré de la norme euclidienne, et contient I_n . Un minimum y est atteint ; tout point en dehors a une valeur supérieure à n et ne peut améliorer celle de I_n . Le minimum global existe donc.

Les valeurs propres $s_1, \dots, s_n$ de $M^T M$ sont strictement positives et leur produit vaut 1. L'inégalité arithmético-géométrique donne $g(M) = \sum s_j \geq n$. L'égalité a lieu exactement si tous les s_j valent 1, soit $M^T M = I_n$. Avec $\det M = 1$, les points minimisants sont exactement $SO_n(\mathbb{R})$, et le minimum vaut n .

III. Morphismes continus du cercle

18. Sous-groupes bornés de $\mathbb{R}^*$ et déterminant

Dans un sous-groupe borné, un élément réel de valeur absolue supérieure à 1 aurait des puissances non bornées. Un élément de valeur absolue inférieure à 1 aurait des puissances inverses non bornées. Tout élément a donc pour valeur absolue 1. Les seuls sous-groupes bornés de $\mathbb{R}^*$ sont $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$.

L'image $\varphi(U)$ est compacte, donc son image par le déterminant est un sous-groupe borné de $\mathbb{R}^*$. Le cercle U est connexe, et le déterminant est continu : cette image ne peut contenir les deux valeurs -1 et 1 . Elle contient 1 , donc $\det \varphi(z) = 1$ pour tout z , et $\varphi(U)$ est inclus dans $SL_n(\mathbb{R})$.

19. Valeurs propres de $\varphi(z)$

Soit μ une valeur propre complexe de $\varphi(z)$, avec un vecteur propre non nul v . Pour tout entier r , $\varphi(z)^r = \varphi(z^r)$ reste dans l'image compacte. Or $\varphi(z)^r v = \mu^r v$. La bornitude pour les entiers positifs et négatifs impose $|\mu| = 1$. Toutes les valeurs propres complexes appartiennent donc à U .

20. Relation de groupe pour Ψ

Comme $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$ et φ est un morphisme : $\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)$. En particulier, $\Psi(0) = I_n$ et les matrices $\Psi(x)$ commutent entre elles.

21. Régularité de F et inversibilité locale

Ψ est continue, donc l'intégration coefficient par coefficient donne **F de classe C^1 et $F' = \Psi$** . De plus, $F(x)/x \rightarrow \Psi(0) = I_n$ lorsque x tend vers 0, par continuité et moyenne intégrale, des deux côtés de 0.

L'ensemble des matrices inversibles est ouvert car il est défini par $\det \neq 0$. On peut donc choisir $\alpha > 0$ assez petit pour que $F(x)/x$ soit inversible pour $0 < |x| \leq \alpha$. Puisque $x \neq 0$, $F(x)$ l'est aussi.

22. Régularisation de Ψ

La relation de groupe donne :

$$\Psi(x)F(\alpha) = \int_0^\alpha \Psi(x)\Psi(u) du = \int_x^{x+\alpha} \Psi(t) dt.$$

Multiplier à droite par $F(\alpha)^{-1}$ fournit la formule demandée. Le membre intégral est $F(x+\alpha) - F(x)$, de classe C^1 . Ainsi **Ψ est de classe C^1** .

23. Forme exponentielle

Poser $M = \Psi'(0)$. En dérivant $\Psi(x + y) = \Psi(x)\Psi(y)$ par rapport à x en $x = 0$, on obtient $\Psi'(y) = M\Psi(y)$, avec $\Psi(0) = I_n$. L'unique solution de cette équation différentielle matricielle est $\Psi(x) = \exp(xM)$. On peut le vérifier en dérivant $\exp(-xM)\Psi(x)$, dont la dérivée est nulle.

IV. Forme réelle des morphismes

24. Similitude réelle

Si A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, choisir $P = U + iV$ inversible, avec U et V réelles, tel que $AP = PB$. Alors $AU = UB$ et $AV = VB$.

Le polynôme réel $q(t) = \det(U + tV)$ n'est pas identiquement nul, puisque $q(i) = \det P \neq 0$. Il n'a donc qu'un nombre fini de racines réelles. Choisir t réel hors de ces racines : $Q = U + tV$ est réelle, inversible, et $AQ = QB$. Ainsi **A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$** .

25. Noyaux d'une matrice nilpotente

L'inclusion $\ker N \subset \ker N^2$ est immédiate. Si N est nilpotente non nulle, son indice de nilpotence r est au moins 2. Choisir v tel que $N^{r-1}v \neq 0$ et poser $w = N^{r-2}v$. Alors $Nw \neq 0$ mais $N^2w = 0$. L'inclusion est donc stricte : **$\ker N \neq \ker N^2$** .

26. Spectre de M

Comme $\Psi(2\pi) = \varphi(1) = I_n$, on a **$\exp(2\pi M) = I_n$** . Pour toute valeur propre μ de M et un vecteur propre associé v , $\exp(2\pi M)v = \exp(2\pi\mu)v$. Donc $\exp(2\pi\mu) = 1$, ce qui impose **$\mu = ik$ pour un entier k** .

27. Décomposition complexe

Dans une base de Jordan complexe, M est formée de blocs $\mu I + J$, où J est nilpotente. Prendre D diagonale avec chaque μ répété sur son bloc et N constitué des parties J . Alors **M est semblable à $D + N$** , D et N commutent, N est nilpotente et le spectre de D est celui de M .

28. Disparition de la partie nilpotente

Les termes diagonaux de D sont des ik , donc **$\exp(2\pi D) = I_n$** . Comme D et N commutent, $\exp(2\pi(D + N)) = \exp(2\pi D)\exp(2\pi N)$; la question 26 implique **$\exp(2\pi N) = I_n$** .

Si N était non nulle, la question 25 fournirait w avec $Nw \neq 0$ et $N^2w = 0$. La série exponentielle appliquée à w se réduit à $w + 2\pi Nw$, qui serait différent de w . Contradiction. Ainsi **$N = 0$** , et M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

29. Blocs de rotations réels

M étant réelle, ses valeurs propres non nulles ik se présentent par paires conjuguées ik et $-ik$, de mêmes multiplicités. Former une matrice réelle B diagonale par blocs kJ , avec **$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$** , une fois par paire, puis des blocs scalaires 0 pour les valeurs propres nulles.

M et B sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités ; elles sont donc semblables sur $\mathbb{C}$. Par la question 24, elles le sont sur $\mathbb{R}$: **$M = QBQ^{-1}$** , avec Q réelle inversible.

Comme $\exp(xk_j) = R_{xk_j}$, il vient $\Psi(x) = Q \operatorname{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) Q^{-1}$, avec k_j entiers non nuls et $2p \leq n$. Si $M = 0$, $p = 0$ et Ψ est constamment égale à I_n . Q n'a pas à être orthogonale : le morphisme est conjugué à un morphisme à valeurs orthogonales.

30. Réciproque

Les rotations vérifient $R_{k(x+y)} = R_{kx} R_{ky}$; les blocs 1 restent inchangés. Après conjugaison par Q , on obtient $\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)$ et $\Psi(0) = I_n$. Les matrices sont inversibles et leurs coefficients sont continus en x : c'est un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Les fréquences entières rendent en outre Ψ périodique de période 2π ; cette formule redonne donc un morphisme bien défini sur le cercle en posant $\varphi(e^{ix}) = \Psi(x)$.