

Corrigé professeur de 2e catégorie agricole 2026 — Mathématiques 1

Proposition de corrigé — non officielle. Concours externe 2026, accès à la deuxième catégorie de l'enseignement agricole privé, section mathématiques, épreuve disciplinaire n° 1 commune avec le CAPESA. Les trois problèmes des neuf pages sont traités.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Problème 1 — Vrai ou faux

Chaque réponse doit être justifiée. Une valeur approchée ne suffit pas à prouver une égalité exacte.

1. Parité — Vrai

Par contraposition, si n est pair, $n = 2m$ et $n^2 = 4m^2$ est pair. Par conséquent, si n^2 est impair, n est impair.

2. Produit — Vrai

Pour $k \geq 2$, $1 - 1/k^2 = ((k - 1)/k)((k + 1)/k)$. Les deux produits se simplifient :

$$\prod_{k=2}^n (1 - 1/k^2) = (1/n) \times ((n + 1)/2) = (n + 1)/(2n).$$

3. Suite récurrente — Faux

La croissance de f ne détermine pas à elle seule le sens de variation de la suite. Prendre $I = [0, +\infty[$, $f(x) = x/2$ et $u_0 = 1$: f est croissante, mais $u_n = 2^{-n}$ est strictement décroissante. Pour une fonction croissante, le signe de $u_1 - u_0$ se transmet aux différences suivantes.

4. Couple réel — Vrai

$x^2 + y^2 = xy$ équivaut à $(x - y/2)^2 + 3y^2/4 = 0$. Les deux termes sont positifs ou nuls ; ils s'annulent ensemble uniquement pour $x = y = 0$.

5. Équation exponentielle — Faux

Poser $u = e^x > 0$. L'équation devient $u^2 + u - 2 = (u - 1)(u + 2) = 0$. La racine -2 est impossible pour e^x ; la seule solution réelle est $x = 0$.

6. Équation sur les réels positifs — Vrai

$H(x) = x - 1 - 1/\sqrt{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, avec $H'(x) = 1 + 1/(2x^{3/2}) > 0$. Ses limites sont $-\infty$ en 0 et $+\infty$ à l'infini. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance donnent exactement une solution.

7. Composition — Vrai

$h(x) = e^{2x} - 2$. Pour $x > 0$, $h(x) > -1$: la composition est définie et $f(h(x)) = \ln(1 + e^{2x} - 2) = \ln(e^{2x} - 1)$.

8. Produit de fonctions — Faux

Prendre $f(x) = \max(x, 0)$ et $g(x) = \max(-x, 0)$. Leur produit est nul pour tout x , mais $f(1) = 1$ et $g(-1) = 1$. Aucune des deux fonctions n'est identiquement nulle. L'énoncé confond une alternative valable en chaque point avec une alternative portant sur les fonctions entières.

9. Dérivée — Faux

Pour $a > 0$, $a^x = \exp(x \ln a)$, donc $f'(x) = (\ln a)a^x$. La formule xa^{x-1} concerne une autre expression et n'est pas valable ici. Par exemple, avec $a = 1$, f est constante et sa dérivée est nulle.

10. Intégrale à bornes variables — Faux

Une primitive F de $t \mapsto e^t/t$ existe sur $]0, +\infty[$ et $g(x) = F(x) - F(1/x)$. Par dérivation :

$$g'(x) = e^x/x - (e^{1/x}/(1/x))(-1/x^2) = (e^x + e^{1/x})/x.$$

Le terme lié à la borne inférieure a donc un signe positif. En $x = 1$, la dérivée vaut $2e$, alors que l'expression proposée dans le sujet vaut 0.

11. Symétrie d'une intégrale — Vrai

Noter $J = \int_a^b x f(x) dx$. Avec $t = a + b - x$ et la symétrie donnée, $J = \int_a^b (a + b - t)f(t) dt$. En ajoutant cette expression à la première, $2J = (a + b) \int_a^b f(t) dt$: on obtient l'identité annoncée.

12. Équation différentielle — Faux

Le polynôme caractéristique est $(r - 1)^2$. Toutes les solutions sont $y(x) = (A + Bx)e^x$, avec A et B réels. La proposition oublie les solutions où $B \neq 0$; $x e^x$ est un contre-exemple.

13. Lieu complexe — Faux

Écrire $z = x + iy$. Avec les conjugaisons du sujet, on obtient :

$$Z = x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 + 4ix.$$

Z est imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle, soit $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$. C'est bien un cercle, mais son centre a pour affixe $-2 - i$, et son rayon est 2.

14. Longueur dans un triangle — Faux

La loi des cosinus donne $AB^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 30^\circ = 25 - 12\sqrt{3}$. Ainsi $AB = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$. Cette valeur est proche de 2,05, mais n'est pas exactement $41/20$. Son carré est irrationnel, contrairement à $(41/20)^2$.

15. Carrés successifs — Vrai

Si le côté du carré initial est s , son cercle circonscrit a pour rayon $s\sqrt{2}/2$. Ce cercle inscrit dans le carré suivant lui donne un côté $s\sqrt{2}$. L'aire double à chaque étape. L'aire initiale valant 1, celle du carré de rang n vaut 2^n , donc 2^{2024} au rang demandé.

16. Droites et plan

a) Faux. A appartient au plan, car $2 - 1 = 1$. Mais le produit scalaire du normal $(1, -1, 2)$ avec le directeur $(-1, 0, 1)$ vaut 1, et non 0. Sur la droite, $(x, y, z) = (2 - t, 1, t)$, d'où $x - y + 2z = 1 + t$: seul $t = 0$ appartient au plan.

b) Vrai. Le directeur de D_1 est $(1, -1, 2)$, égal à un vecteur normal du plan. D_1 est donc orthogonale au plan.

17. Rectangle — Vrai pour un quadrilatère non dégénéré

L'ensemble défini par $MA \cdot MC = 0$ est le cercle de diamètre $[AC]$, extrémités comprises ; l'autre est le cercle de diamètre $[BD]$. Si les cercles sont égaux, leurs centres et rayons sont égaux : les diagonales ont le même milieu et la même longueur. Le quadrilatère est alors un parallélogramme à diagonales égales, donc un rectangle. Réciproquement, les diagonales d'un rectangle ont le même milieu et la même longueur ; les deux cercles sont égaux. On utilise ici le sens usuel d'un quadrilatère, avec quatre sommets distincts formant une figure non dégénérée.

Problème 2 — Transmission génétique

Les calculs suivent le modèle mendélien simplifié de l'énoncé. Les tirages des parents et les transmissions des deux allèles sont indépendants dans ce modèle. On a $a, b, c \geq 0$ et $a + b + c = 1$.

1. Parents P-h et P-h

a) Dans un tableur en français, une formule possible en B2, à recopier dans les deux colonnes jusqu'à la ligne 101, est :

`=SI(ALEA()<0,5;"P";"h")`

Chaque cellule simule un allèle ; deux cellules indépendantes donnent les deux allèles du veau.

b) Les couples équiprobables sont (P, P) , (P, h) , (h, P) , (h, h) . Les deux couples mixtes correspondent au même génotype. On trouve $P(P-P) = 1/4$, $P(P-h) = 1/2$ et $P(h-h) = 1/4$.

c) Sur 100 veaux, les effectifs moyens sont donc 25, 50 et 25. Le tableau du sujet présente respectivement des effectifs de 18 à 34, de 37 à 55 et de 22 à 32. Ces écarts sont compatibles avec la fluctuation aléatoire d'échantillons de 100 individus. Pour chaque effectif considéré séparément, la loi est binomiale ; les écarts types valent environ 4,33 pour P-P et h-h, et 5 pour P-h. Les trois effectifs ne sont pas indépendants puisqu'ils totalisent 100. Dix simulations n'ont pas à fournir exactement les proportions théoriques et ne constituent pas, à elles seules, une démonstration du modèle.

2. Vache sans cornes et taureau avec cornes

Le symbole $[H]$ de cette question est interprété comme le phénotype avec cornes, noté $[h]$ dans les définitions : le taureau est h-h. La sélection décrite suppose $a + b > 0$ et la présence d'animaux avec cornes.

a) Parmi les vaches $[P]$, seules les classes P-P et P-h sont possibles. Par conditionnement, leurs probabilités sont $a/(a + b)$ et $b/(a + b)$.

b) Un croisement P-P × h-h donne toujours P-h ; un croisement P-h × h-h donne pour moitié P-h et pour moitié h-h. Ainsi :

Génotype du veau	Probabilité
P-P	0
P-h	$a/(a + b) + b/(2(a + b)) = (2a + b)/(2(a + b))$
h-h	$b/(2(a + b))$

3. Deux parents sans cornes

Un parent choisi parmi les [P] transmet P avec la probabilité $q = (2a + b)/(2(a + b))$, et h avec $r = b/(2(a + b))$. En effet, les P-P transmettent toujours P et les P-h le transmettent une fois sur deux. Comme $q + r = 1$, les probabilités du veau sont q^2 pour P-P, $2qr$ pour P-h et r^2 pour h-h. Le facteur 2 compte les deux transmissions mixtes.

4. Deux parents dans toute la population

Sans sélection du phénotype, la probabilité de transmettre P est $u = a + b/2$, et celle de transmettre h est $v = c + b/2 = 1 - u$. Les mêmes combinaisons indépendantes donnent :

$$P(P-P) = (a + b/2)^2 ; P(P-h) = 2(a + b/2)(c + b/2) ; P(h-h) = (c + b/2)^2.$$

La somme vaut $(u + v)^2 = 1$. Il ne faut pas utiliser les probabilités conditionnelles de la question 3 lorsqu'aucune sélection des parents n'est effectuée.

Problème 3 — Transmission d'une information

A.1. Fonction factorielle

Le script fourni comporte deux erreurs : le test doit utiliser `==`, et le produit ne doit pas commencer par 0. La version suivante traite aussi $0! = 1$, puisque la boucle est alors vide :

```
def factorielle(n):
    f = 1
    for i in range(1, n + 1):
        f *= i
    return f
```

On suppose n entier naturel, comme dans l'énoncé.

A.2. Coefficient binomial

Pour des entiers $0 \leq k \leq n$, la division entière évite un résultat flottant :

```
def coefbinom(n, k):
    return factorielle(n) // (
        factorielle(k) * factorielle(n - k)
    )
```

A.3. Identité

Pour $1 \leq k \leq n$, $(n/k) \times (n-1)!/((k-1)!(n-k)!) = n!/(k!(n-k)!)$. C'est l'identité demandée entre les coefficients binomiaux.

A.4. Espérance binomiale

Dans la somme $E[X] = \sum_{k=0}^n k C(n, k) p^k (1-p)^{n-k}$, le terme $k=0$ est nul. Utiliser $k C(n, k) = n C(n-1, k-1)$, puis poser $j = k-1$:

$$E[X] = np \sum_{j=0}^{n-1} C(n-1, j) p^j (1-p)^{n-1-j} = np.$$

La dernière somme vaut $(p + 1 - p)^{n-1} = 1$ par le binôme de Newton.

A.5. Intégrales et approximation de e

a) $I_0(a) = \int_0^a e^{-x} dx = 1 - e^{-a}$.

b) Sur $[0, 1]$, $0 \leq e^{-x} \leq 1$, donc $0 \leq I_n(1) \leq \int_0^1 x^n/n! dx = 1/(n+1)!$. Par encadrement, $I_n(1)$ tend vers 0.

c) Pour $n \geq 1$, une intégration par parties, avec $u = x^n/n!$ et $dv = e^{-x} dx$, donne :

$$I_n(a) = [-x^n e^{-x}/n!] \text{ de } 0 \text{ à } a + I_{n-1}(a) = -a^n e^{-a}/n! + I_{n-1}(a).$$

d) En appliquant cette relation successivement jusqu'à $I_0(a)$, on obtient $I_n(a) = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^n a^k/k!$. Cela se vérifie aussi par récurrence.

e) Avec $a = 1$ et $u_n = \sum_{k=0}^n 1/k!$, la relation devient $u_n = e(1 - I_n(1))$. La limite précédente établit $u_n \rightarrow e$ sans supposer cette formule de série au départ.

f) Pour $j \geq 1$, $(n+j)! \geq n!(n+1)^j$. En comparant à une série géométrique :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k! \leq (1/n!) \sum_{j=1}^{\infty} (n+1)^{-j} = 1/(n n!).$$

Comme $u_n \leq e$, on en déduit $|u_n - e| \leq 1/(n n!)$.

g) Pour $s > 0$, le programme du sujet augmente n jusqu'à obtenir $1/(n n!) \leq s$. Mais sa variable u commence à 1, puis ajoute les termes à partir de $1/2!$. À la sortie, elle vaut donc $u_n - 1$, et fournit une approximation de $e - 1$, à une erreur au plus s . Elle ne fournit pas une approximation de e : le terme $1/1!$ manque.

Si l'objectif est d'approcher e , on peut écrire :

```
def approximation_e(s):
    if s <= 0:
        raise ValueError("La précision doit être positive")
    n = 1
    u = 2.0
    while 1 / (n * factorielle(n)) > s:
        n += 1
        u += 1 / factorielle(n)
    return u
```

La borne est une borne mathématique ; pour des précisions proches de celles de la machine, il faut aussi considérer les arrondis numériques. Pour $s = 0,001$, n atteint 6 et l'approximation de e vaut environ 2,718055556. Le programme initial renvoie environ 1,718055556.

B.1. Transmission directe

1. Les n destinataires correspondent à n essais indépendants, avec la même probabilité p de recevoir la bonne valeur. Ainsi **N suit $B(n, p)$** .

2.a) $E[N] = 80 \times 3/4 = 60$ individus en moyenne.

2.b) La probabilité demandée est la somme des termes binomiaux de 70 à 80 :

$$P(N \geq 70) = \sum_{k=70}^{80} C(80, k) (3/4)^k (1/4)^{80-k} \approx 0,004659289.$$

Arrondie à 10^{-3} , elle vaut **0,005**, soit environ 0,466 % avant arrondissement.

B.2. Transmission par intermédiaires

1. Au passage suivant, une valeur correcte reste correcte avec probabilité p ; une valeur incorrecte devient correcte lorsqu'elle est inversée, avec probabilité $1 - p$. En appliquant la règle du sujet à chaque étape :

$$p_{k+1} = p p_k + (1 - p)(1 - p_k) = (2p - 1)p_k + 1 - p.$$

2. Soustraire $1/2$ donne $p_{k+1} - 1/2 = (2p - 1)(p_k - 1/2)$.

3. La suite centrée est géométrique et $p_0 - 1/2 = 1/2$. Par conséquent, $p_n = 1/2 + (2p - 1)^n/2$.

4. Puisque $0 < p < 1$, on a $|2p - 1| < 1$ et $p_n \rightarrow 1/2$. Après beaucoup d'intermédiaires, la valeur finale devient aussi probable que son contraire : elle ne permet plus de reconnaître fiablement la valeur initiale. Pour $p < 1/2$, les écarts à $1/2$ alternent de signe.

B.3. Nombre aléatoire de destinataires

On applique aux destinataires à l'écoute le modèle de transmissions directes indépendantes utilisé en B.1.

1. Conditionnellement à $X = n$, Y suit $B(n, p)$. Pour $0 \leq k \leq n$, $P(Y = k | X = n) = C(n, k) p^k (1 - p)^{n-k}$. Lorsque $n = 0$, $Y = 0$ avec certitude.

2.a) La formule des probabilités totales, puis la simplification des factorielles, donnent, pour $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^n / n! \times C(n, k) p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} (\lambda p)^k / k! \times \sum_{n=k}^{\infty} (\lambda(1 - p))^{n-k} / (n - k)!. \end{aligned}$$

2.b) En posant $j = n - k$, la somme vaut $\exp(\lambda(1 - p))$. Ainsi **$P(Y = k) = \exp(-\lambda p) (\lambda p)^k / k!$** , pour k entier naturel : **Y suit la loi de Poisson de paramètre λp** .

2.c) La probabilité qu'aucune personne ne reçoive la bonne valeur est donc **$P(Y = 0) = \exp(-\lambda p)$** . Elle inclut à la fois l'absence de destinataire à l'écoute et les situations où tous les destinataires présents reçoivent la mauvaise valeur.