

Banque PT 2026 : corrigé de mathématiques B

Proposition de corrigé - non officielle. Banque PT, session 2026, mathématiques B, durée 4 heures.

[Sujet officiel](#) · [Annales de ce concours ou examen](#)

Exercice 1 : polynômes et rotation

A. L'espace H et les applications

1. Écrivons $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Comme $P(0) = a$ et $P'''(0) = 6d$, la condition définissant H devient $a = d$. Ainsi $H = \text{Vect}(1 + X^3, X, X^2)$. Ces trois polynômes sont indépendants par identification des coefficients : H est un sous-espace de dimension 3.

2. La dérivation et l'évaluation sont linéaires, donc $h(\alpha P + \beta Q) = \alpha P'(0) + \beta Q'(0)$. L'application prend ses valeurs dans R et son image est exactement R, puisque $h(bX) = b$ pour tout réel b.

3. Pour $P = a(1 + X^3) + bX + cX^2$, la formule de l'énoncé donne :

$$f(P) = -(b + c)(1 + X^3)/2 + [a + (b - c)/2]X + [a + (c - b)/2]X^2.$$

Ce polynôme appartient à H. Puisque la linéarité est admise et que f envoie H dans H, f est un endomorphisme de H.

B. Produit scalaire et projection

4. Un produit scalaire réel est une application bilinéaire, symétrique et définie positive : $\varphi(P, P) \geq 0$, avec égalité seulement pour $P = 0$.

5. La symétrie permet de transférer la linéarité d'une variable à l'autre : $\varphi(P, \alpha Q + \beta R) = \varphi(\alpha Q + \beta R, P) = \alpha \varphi(Q, P) + \beta \varphi(R, P) = \alpha \varphi(P, Q) + \beta \varphi(P, R)$. L'application est donc bilinéaire.

6. **Première preuve.** Les quatre valeurs $P(0)$, $P'(0)$, $P''(0)$ et $P'''(0)$ valent respectivement a, b, 2c et 6d : leur annulation donne $a = b = c = d = 0$. **Deuxième preuve.** La formule de Taylor exacte pour un polynôme de degré au plus 3 écrit $P(X) = \sum P^{(k)}(0)X^k/k!$; si tous ces coefficients sont nuls, $P = 0$.

Le produit scalaire du sujet est donc, pour les coefficients ordinaires, $\varphi(P, Q) = aa' + bb' + cc' + dd'$. Les facteurs $k!$ se compensent.

7. X et X^2 ont chacun une norme égale à 1 et leur produit scalaire vaut 0. Ils appartiennent à H.

8. Posons $T = (1 + X^3)/\sqrt{2}$. Il est unitaire et orthogonal à X et X^2 . Une base orthonormée classée par degrés décroissants est $B = (T, X^2, X)$.

9.a. La projection de 1 sur H vaut $\varphi(1, T)T + \varphi(1, X^2)X^2 + \varphi(1, X)X = T/\sqrt{2} = (1 + X^3)/2$.

9.b. Le reste $1 - \text{proj}_H(1) = (1 - X^3)/2$ est non nul et orthogonal à H . Comme H est de codimension 1, $(1 - X^3)$ constitue une base de $H^\perp$.

C. La rotation de $\mathbb{R}^3$

10. On peut choisir $u' = (0, 1, -1)/\sqrt{2}$, $v' = (1, 0, 0)$ et $w' = (0, -1, -1)/\sqrt{2}$. Ces vecteurs sont unitaires, orthogonaux et $u' \times v' = w'$: la base est directe. Une rotation d'angle $-\pi/2$ fixe u' , envoie v' sur $-w'$ et w' sur v' . Sa matrice dans cette base est :

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Si Q a pour colonnes u', v', w' , alors Q est orthogonale et $R = QR'Q^T$. En posant $s = 1/\sqrt{2}$, le produit donne :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -s & -s \\ s & 1/2 & -1/2 \\ s & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

On retrouve également ce résultat avec $R = u'u'^T - [u'] \times$, formule de Rodrigues pour $\cos(-\pi/2) = 0$ et $\sin(-\pi/2) = -1$.

12. R^T représente la rotation inverse, d'angle $+\pi/2$. Comme $R^4 = I$ et $2025 \equiv 1$ modulo 4, $R^{2025} = R$ représente la rotation initiale. $R^{2026} = R^2$ représente une rotation d'angle π autour de Δ . C'est aussi la **symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ** : elle fixe la composante parallèle à l'axe et change le signe de la composante perpendiculaire. Il s'agit d'une symétrie axiale dans l'espace, et non d'une réflexion par rapport à un plan.

D. Matrice de f

13. Les images des vecteurs de B sont : $f(T) = sX^2 + sX$; $f(X^2) = -sT + X^2/2 - X/2$; $f(X) = -sT - X^2/2 + X/2$. Leurs coordonnées placées en colonnes donnent **Mat_B(f) = R**, avec la matrice ci-dessus.

14. Prenons $B'' = ((X^2 - X)/\sqrt{2}, T, -(X^2 + X)/\sqrt{2})$. La première composante est fixée ; $f(T)$ est l'opposé de la troisième ; l'image de la troisième est T . On obtient bien la matrice demandée, identique à R' . Les coefficients montrent que les trois vecteurs ont norme 1 et sont deux à deux orthogonaux : B'' est même orthonormée.

Exercice 2 : coniques et surfaces

A. Définitions et paramètres

1.a. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ définit une ellipse, éventuellement un cercle si $a = b$. Un paramétrage est $(a \cos t, b \sin t)$, t réel.

1.b. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ définit une hyperbole à deux branches : $(a \cosh t, b \sinh t)$ et $(-a \cosh t, b \sinh t)$, t réel.

2. La conique de foyer F , directrice D et excentricité ε est l'ensemble des points M tels que $MF = \varepsilon d(M, D)$. Pour $0 < \varepsilon < 1$, c'est une ellipse ; pour $\varepsilon = 1$, une parabole ; pour $\varepsilon > 1$, une hyperbole.

3. La relation $z' = \exp(i\theta)z$ représente une rotation de centre O et d'angle θ , modulo 2π .

B. La conique C

4.a. Un vecteur normal à D est $n = (\sqrt{3}, 1)$, de norme carrée 4. La projection orthogonale s'écrit $M' = M - [(\sqrt{3}x + y - 3)/4]n$. Ainsi :

$$x' = (x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3})/4 ; y' = (3y - \sqrt{3}x + 3)/4.$$

4.b. En développant $\exp(i\pi/3)$ et $\exp(i\pi/6)$ et en utilisant le conjugué $\bar{z} = x - iy$, ces deux coordonnées donnent $z' = [z - \bar{z}\exp(i\pi/3) + 3\exp(i\pi/6)]/2$.

5. Par soustraction : $z - z' = [z + \bar{z}\exp(i\pi/3) - 3\exp(i\pi/6)]/2$.

6. L'équation de C devient donc $OM = 2 MM' = 2 d(M, D)$. C est une **hyperbole de foyer O, de directrice D et d'excentricité 2**.

C. Rotation et tracé de l'hyperbole

7. Un normal d'abscisse positive est $(\sqrt{3}, 1)$. Son angle avec le premier axe vaut $\alpha = \pi/6$, modulo 2π .

8.a. Avec $z = \exp(i\alpha)Z$, on a $\bar{z}\exp(i\pi/3) = \exp(i\alpha)Z$ et $3\exp(i\pi/6) = 3\exp(i\alpha)$. Le module du facteur $\exp(i\alpha)$ vaut 1 : $|Z| = |Z + Z - 3|$.

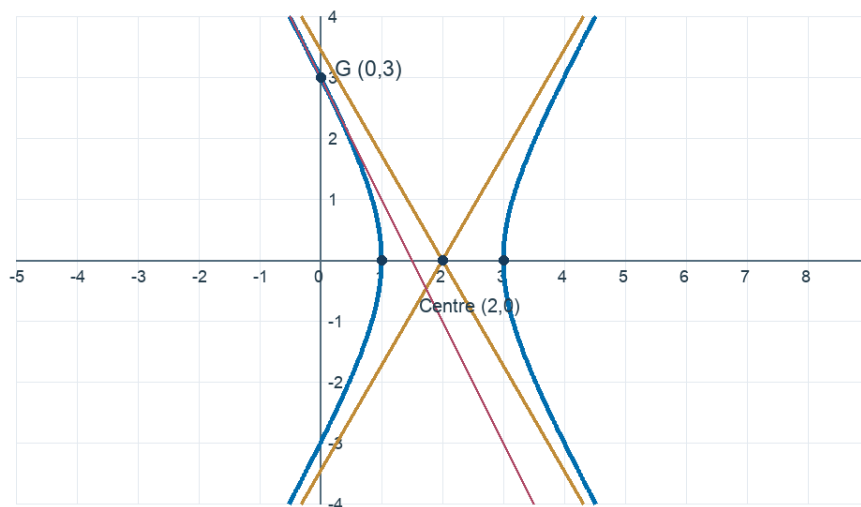
8.b. Si $Z = x + iy$, cette égalité équivaut à $x^2 + y^2 = (2x - 3)^2$, soit $3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0$. L'élévation au carré est ici réversible car les deux membres initiaux sont positifs ou nuls.

8.c. En complétant le carré, $(x - 2)^2 - y^2/3 = 1$. Le centre est (2,0), les sommets (1,0) et (3,0), les asymptotes $y = \pm\sqrt{3}(x - 2)$. Les foyers sont (0,0) et (4,0), puisque $c^2 = 1 + 3 = 4$.

8.d. Pour $F(x,y) = 3x^2 - 12x - y^2 + 9$, le gradient en G(0,3) vaut $(-12, -6)$. La tangente a pour équation $-12x - 6(y - 3) = 0$, donc $2x + y - 3 = 0$.

9.a. Le tracé ci-dessous montre les deux branches, les sommets, le centre et les asymptotes. Sur une copie, une même unité doit être utilisée sur les deux axes.

PT 2026 : hyperbole $(x - 2)^2 - y^2/3 = 1$



Bleu : hyperbole · Ocre : asymptotes · Rose : tangente $2x + y - 3 = 0$

Hyperbole de centre (2,0), sommets (1,0) et (3,0), asymptotes et tangente en G.

9.b. C s'obtient par une rotation de centre O et d'angle $+\pi/6$ appliquée à C'.

D. Le cône et ses sections

10. Sur C'', $z = 1$ et $3x^2 - y^2 = 3$. Donc $-3x^2 + y^2 + 3z^2 = -3 + 3 = 0$: C'' est incluse dans S.

11.a. Le gradient de $F(x,y,z) = -3x^2 + y^2 + 3z^2$ vaut $(-6x, 2y, 6z)$. Il s'annule uniquement en O. Tous les points de S autres que O sont réguliers ; O est le sommet singulier du cône.

11.b. $J(2, -3, -1)$ appartient à S. Le plan tangent est $-12(x - 2) - 6(y + 3) - 6(z + 1) = 0$, soit **$2x + y + z = 0$** .

12.a. Dans le plan P_λ , l'identité fournie transforme $F = 0$ en $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda(2x - \sqrt{2}z)$. En complétant les carrés :

$$(x - \lambda)^2 + y^2 + (z + \lambda/\sqrt{2})^2 = 3\lambda^2/2.$$

Le centre $A_\lambda = (\lambda, 0, -\lambda/\sqrt{2})$ de cette sphère appartient au plan, car $2\lambda + \sqrt{2}(-\lambda/\sqrt{2}) = \lambda$. Pour $\lambda \neq 0$, l'intersection est donc un cercle de centre A_λ et de rayon $|\lambda|\sqrt{3/2}$.

Cas particulier à préciser : $\lambda = 0$ donne uniquement le point O. Dans ce sujet, aucune section n'est vide. La formule « vide ou cercle » omet ce cas ponctuel, sauf si le mot cercle inclut exceptionnellement un cercle de rayon nul.

12.b. Ces sections circulaires ne suffisent pas à établir une surface de révolution : leurs centres ne sont pas alignés suivant la normale commune aux plans. S est un cône elliptique ; les coefficients de sa forme quadratique, -3 , 1 et 3 , sont distincts, alors qu'une invariance par rotation autour d'un axe imposerait deux coefficients propres égaux. S n'est donc pas une surface de révolution.

13. Sur la branche C'' d'abscisse positive, $x = \sqrt{(1 + y^2/3)}$, donc **$x \geq 1$** . Une rotation autour de Ox conserve x et le rayon transversal : $Y^2 + Z^2 = y^2 + 1 = 3x^2 - 2$. Réciproquement, tout point ayant ce rayon et $x \geq 1$ est obtenu par une telle rotation. La surface cherchée est donc :

$$\Sigma : 3x^2 - y^2 - z^2 = 2, \text{ avec } x \geq 1.$$

L'inégalité est indispensable : l'équation seule ajouterait une autre nappe et une portion de la nappe positive qui n'est pas engendrée par la courbe du sujet.